O SZEREGACH FOURIERA

1. Wielomiany i szeregi trygonometryczne.

Funkcję postaci

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*. Jak widać, wielomian trygonometryczny jest funkcją okresową o podstawowym okresie 2π i ma nieskończenie wiele pochodnych, które są także wielomianami trygonometrycznymi.

Bardzo ważnym ważnym przykładem jest funkcja

$$D_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

zwana *jądrem Dirichleta*. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_m(x)\,dx = 1.$$

Współczynniki wielomianu trygonometrycznego można „wyłuskać” przez całkowanie.

1.1. *Jeśli*

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

to

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x) e^{-ikx}\,dx.$$

Przypuśćmy, że $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ jest funkcją okresową o okresie 2π i całkowalną w sensie Riemanna na odcinkach domkniętych. Klasę takich funkcji będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. Dotychczasowe rozważania nasuwają myśl o przedstawieniu funkcji okresowych jako *szeregów trygonometrycznych*, to znaczy szeregów postaci

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx. \tag{1.2}$$

Widzimy, że sumy częściowe szeregu trygonometrycznego są wielomianami trygonometrycznymi. Tak zbudowany szereg trygonometryczny nazywa się *szeregiem Fouriera* funkcji f. Aby to zaznaczyć, piszemy

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}, \qquad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx.$$

Sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f będziemy zazwyczaj oznaczać przez

$$S_N(f,x) = \sum_{|k|\leqslant N} \widehat{f}(k)e^{inx}.$$

1.3. *Jak łatwo widać,*

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

1.4. *Jeśli*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

to szereg trygonometryczny

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

jest zbieżny jednostajnie. Ponadto, dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$\widehat{S}(n) = c_n.$$

Dowód. Jednostajna zbieżność szeregu $S(x)$ wynika z kryterium Weierstrassa. Mamy bowiem

$$|c_n e^{inx}| \leqslant |c_n|.$$

Stąd też wzory na współczynniki otrzymujemy całkując jednostajnie zbieżny szereg $S(x)e^{-inx}$ wyraz po wyrazie. □

1.5. Przykład. Niech

$$u(x) = \mathbf{m}\Big(\frac{x}{2\pi}\Big), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Mamy

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2}$$

oraz dla $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}e^{-inx}\,dx = -\frac{xe^{-inx}}{4\pi^2 in}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2 n}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{i}{2\pi n},$$

więc

$$u \sim \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\pi n}$$

jest szeregiem Fouriera naszej funkcji. Szereg ten, jak wiemy, jest zbieżny w każdym punkcie. Ale czy do funkcji u? Zwróćmy też uwagę, że współczynniki tego szeregu nie spełniają warunku bezwzględnej zbieżności, który postulowaliśmy w (1.4).

1.6. Przykład. Niech v będzie rozszerzeniem do funkcji okresowej funkcji $x \to |x|$ z odcinka $[-\pi,\pi)$. W odróżnieniu od funkcji u funkcja v jest ciągła. Mamy

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

i dla $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

skąd łatwo otrzymujemy

$$v \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2}.$$

Ten szereg Fouriera jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie. Ale czy do funkcji v?

Wróćmy do ogólnej teorii i zapytajmy: Czy szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny do funkcji f przynajmniej w niektórych punktach? A może wszędzie? Jeśli tak, to czy tylko punktowo, czy jednostajnie?

Niestety nasz świat nie jest idealny. Zdarza się, że szereg funkcji Fouriera funkcji ciągłej nie tylko nie jest zbieżny do funkcji, od której pochodzi, ale jest wręcz rozbieżny w bardzo wielu punktach. Dlatego będziemy się starali ustalić kryteria, która zapewią zbieżność w ustalonym punkcie, a także zbieżność punktową wszędzie; czasem nawet jednostajną. Chcemy oczywiście także wiedzieć, czy szereg Fouriera jest zbieżny do funkcji, od której pochodzi.

1.7. *Jeśli funkcja $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ ma zerowy szereg Fouriera, to jest funkcją zerową.*

Dowód. Niech $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i niech jej wspólczynniki Fouriera będą wszystkie zerowe. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje jednak punkt $a \in [-\pi, \pi)$, taki że $f(a) \neq 0$. Nietrudno zredukować zagadnienie do sytuacji, gdy $a = 0$ i $f(x) \geqslant A > 0$ dla $|x| < \delta$, gdzie $0 < \delta < \pi/2$. Niech

$$T_\delta(x) = 1 + \cos x - \cos\delta, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

T_δ jest wielomianem trygonometrycznym, takim że

$$|T_\delta(x)| \leqslant 1,\ \ \delta \leqslant |x| \leqslant \pi,\ \text{ oraz } T_\delta(x) \geqslant M > 0,\ \ |x| \leqslant \delta/2.$$

Jak wiemy, dla każdego N potęga T_δ^N jest też wielomianem trygonometrycznym, więc wobec założenia o znikaniu wspólczynników Fouriera mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_\delta(x)^N \, dx = 0, \qquad N \in \boldsymbol{N},$$

a więc

$$-\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} f(x) T_\delta(x)^N \, dx = \int_{|x| \leqslant \delta} f(x) T_\delta(x)^N \, dx.$$

Pokażemy, że ostatnia równość prowadzi do sprzeczności. Rzeczywiście, lewa strona szacuje od góry się przez

$$|L_N| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx,$$

a więc jest ograniczona niezależnie od N, natomiast prawa spełnia oszacowanie od dołu

$$P_N \geqslant \int_{|x| \leqslant \delta/2} f(x) T_\delta(x)^N \, dx \geqslant M^N A\delta$$

a więc dąży wraz z N do nieskończoności. $\square$

2. Jądro Dirichleta.

Naszą teorię zaczniemy od wyrażenia sum częściowych szeregu Fouriera w zamkniętej formie, w której łatwiej będzie je badać.

2.1. Lemat. *Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i niech $S_m(x) = S_m(f, x)$ będzie sumą częściową szeregu Fouriera f. Wtedy*

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t)\, dt.$$

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} S_m(x) = \sum_{n=-m}^{m} \widehat{f}(n) e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big(\sum_{n=-m}^{m} e^{i(x-t)} \Big)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t)\, dt. \end{aligned}$$

□

Czytelnik nie powienien się zdziwić, gdy powiemy, że w całej teorii kluczową rolę odgrywać będzie całka Dirichleta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_m(t)\, dt.$$

2.2. Lemat (Riemann-Lebesgue). *Niech $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) e^{inx}\, dx = 0.$$

Dokładniej, dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$

$$\left| \int_a^b f(x) e^{inx}\, dx \right| \leqslant \sup_{\delta(P) \leqslant 2\pi/|n|} \Omega(f, P) + \|f\|_\infty \frac{2\pi}{|n|}.$$

Dowód. Nietrudno zagadnienie sprowadzić do przypadku, gdy $a = 0$. Dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$ zdefiniujmy podział odcinka $[0, b]$ w następujący sposób. Niech

$$x_k^n = \frac{2k\pi}{|n|}, \qquad 0 \leqslant N - 1,$$

gdzie N jest wybrane tak, by $\frac{2(N-1)\pi}{|n|} < b \leqslant \frac{2N\pi}{|n|}$. Ponadto niech $x_N = b$. Nasz podział, to $P_n = \{x_k\}_{k=0}^N$. Jego odcinkami są $I_k^n = [x_k^n, x_{k+1}^n]$, a średnica wynosi $\delta(P_n) = \frac{2\pi}{|n|}$. Wtedy

$$\int_0^b f(x) e^{inx}\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} f(x) e^{inx}\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_k^n,$$

gdzie

$$S_k^n = \int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} \Big(f(x) - f(x_k^n) \Big) e^{inx}\, dx, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-2,$$

co wynika z faktu, że

$$\int_{x_k^n}^{x_{k+1}^n} e^{inx}\, dx = 0,$$

oraz

$$S^n_{N-1} = \int_{x^n_{N-1}}^b \Big(f(x) - f(x^n_{N-1})\Big) e^{inx}\, dx + f(x^n_{N-1}) \int_{x^n_{N-1}}^b e^{inx}\, dx.$$

Zatem, dla każdego $0 \leqslant k \leqslant N-2$

$$|S^n_k| \leqslant \sup_{x,y \in I^n_k} (f(x) - f(y)) |I^n_k|$$

oraz

$$|S^n_{N-1}| \leqslant \sup_{x,y \in I^n_{N-1}} (f(x) - f(y)) |I^n_{N-1}| + \|f\|_\infty |I^n_{N-1}|.$$

Ostatecznie,

$$\left| \int_0^b f(x) e^{inx}\, dx \right| \leqslant \Omega(f, P_n) + \|f\|_\infty \frac{2\pi}{|n|},$$

gdzie $\delta(P_n) = \frac{2\pi}{|n|}$, skąd natychmiast wynika nasza teza. □

2.3. Wniosek. *Współczynniki Fouriera funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ znikają w nieskończoności.*

Lemat Riemanna-Lebesgue'a pozwala dostrzec ważny związek między całką Dirichleta i całką Hilberta.

2.4. Wniosek. *Dla każdych $0 \leqslant a < b < \pi$*

$$\int_a^b D_n(t)\, dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\, dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $A_n = (n + \frac{1}{2})\, a$, $B_n = (n + \frac{1}{2})\, b$ i $\varepsilon_n \to 0$. W szczególności,

$$\left| \int_a^b D_n(t)\, dt \right| \leqslant C$$

niezależnie ani od $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$, ani od $n \in \boldsymbol{N}$.

Dowód. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} \int_a^b D_n(t)\, dt &= 2 \int_{a/2}^{b/2} D_n(2t)\, dt \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt + \int_{a/2}^{b/2} f(t) \sin(2n+1)t\, dt, \end{aligned}$$

gdzie

$$f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} = -\frac{r_3(t)}{t \sin t}, \qquad |r_3(t)| \leqslant c|t|^3,$$

jest funkcją całkowalną. Po zamianie zmiennej

$$\int_a^b D_n(t)\, dt = \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin t}{t}\, dt + \varepsilon_n,$$

gdzie $\varepsilon_n \to 0$ na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a. □

2.5. Przykład. Zauważmy mimochodem, że dla $a = 0$, $bn = \pi$ mamy

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,dt = 2\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \varepsilon_n,$$

więc

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Obliczyliśmy wartość całki Hilberta.

Oto najważniejsza własność jądra Dirichleta.

2.6. Wniosek. *Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy = 0,$$

przy ustalonym x.

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy &= \int_{\delta<|y-x|\leqslant\pi} f(x-y)\frac{\sin(2n+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\,dy \\ &= 2\int_{\delta/2<|y|\leqslant\pi/2} f(x-2y)g(y)\sin(2n+1)y\,dy,\end{aligned}$$

gdzie

$$g(y) = \frac{1}{\sin y}.$$

Dla ustalonego x teza wynika z lematu Riemanna-Lebesgue'a. $\square$

3. Kryteria zbieżności

3.1. Twierdzenie (kryterium podstawowe). *Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$. Szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny w punkcie x do wartości $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, takie że dla dostatecznie dużych n*

$$\Big|\int_{|t|\leqslant\delta}\Big(f(x-t)-f(x)\Big)D_n(t)\,dt\Big| < \varepsilon.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x-t)-f(x)\Big)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}\Big(f(x-t)-f(x)\Big)D_n(t) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\Big(f(x-t)-f(x)\Big)D_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Jak widać z Wniosku 2.6, druga całka dąży do zera, więc wszystko zależy od zachowania się pierwszego składnika, a to jest właśnie nasza teza. $\square$

3.2. Wniosek. *Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ spełnia warunek*

$$|f(x) - f(a)| \leqslant C|x - a|,$$

to jej szereg Fouriera w punkcie a jest zbieżny do $f(a)$.

3.3. Wniosek. *Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest różniczkowalna w punkcie a, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej w tym punkcie.*

3.4. Przykład. Funkcja u jest różniczkowalna poza punktami postaci $2k\pi$. Dlatego

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

choć tu zbieżność nie jest jednostajna. W szczególności, podstawiając $x = 1$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

3.5. Wniosek (zasada lokalizacji). *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i $f(x) = g(x)$ w otoczeniu punktu $a \in \boldsymbol{R}$, to*

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f, a) - S_m(g, a) = 0.$$

Dowód. Istotnie,

$$S_m(f, a) - S_m(g, a) = S_m(h, a),$$

gdzie $h = f - g$ znika w otoczeniu a. Zatem h jest różniczkowalna w a, $h'(a) = 0$ i na mocy Wniosku 3.3

$$\lim_{m\to\infty} S_m(h, a) = 0.$$

$\square$

Zasada lokalizacji mówi, że zbieżność szeregu Fouriera w danym punkcie a i jego suma nie zależą od tego, jak funkcja się zachowuje z dala od tego punktu. Dlatego, badając zbieżność szeregu Fouriera danej funkcji w ustalonym punkcie, możemy ją zawsze zmodyfikować poza (nawet bardzo małym) otoczeniem tego punktu, jeśli to tylko upraszcza zadanie.

3.6. Twierdzenie (trzecie o wartości średniej). *Niech $f \in \mathcal{R}([a, b])$ i niech $g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie monotoniczna. Wtedy istnieje $a \leqslant c \leqslant b$, takie że*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Zauważmy, że bez straty ogólności możemy przyjąć, że g jest malejąca, a ponadto $g(a) = 1$ i $g(b) = 0$. To redukuje nasze zadanie do znalezienia $c \in [a, b]$, takiego że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Niech $P = \{x_k\}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$. Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + E(f, g, P),$$

gdzie

$$E(f,g,P)=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)(g(x)-g(x_k)\,dx.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$|E(f,g,P)|\leqslant \|f\|_\infty \Omega(g,P)\leqslant \|f\|_\infty \delta(P). \tag{3.7}$$

Niech

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Przez przekształcenie Abela

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)(F(x_{k+1}-F(x_k))\\ &=\sum_{k=0}^{N-1}(g(x_k)-g(x_{k+1}))F(x_{k+1}),\end{aligned}$$

gdzie ostatnia suma spełnia ograniczenia

$$m\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}(g(x_k-g(x_{k+1}))F(x_{k+1})\leqslant M.$$

Tutaj $m=\inf F(x)$, $M=\sup F(x)$. Zatem

$$m+E(f,g,P)\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M+E(f,g,P),$$

co wobec dowolności P oraz (3.7) daje

$$m\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M.$$

Funkcja F jest ciągła, więc istnieje $c\in[a,b]$, takie że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(c),$$

a to już jest nasza teza. □

3.8. Twierdzenie (kryterium Jordana). *Niech $f\in\mathcal{R}_{2\pi}$. Niech dla pewnego $a\in\boldsymbol{R}$ funkcja f będzie monotoniczna na przedziałach $(a-h,a)$ oraz $(a,a+h)$ dla pewnego $h>0$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,a)=\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}S_n(f,a)-\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(a+y)D_n(y)\,dy-\frac12 f(a-0)\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(a+y)D_n(y)\,dy-\frac12 f(a+-0)\\ &=A_n+B_n.\end{aligned}$$

Pokażemy, że

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(a+y)D_n(y)\,dy - \frac{1}{2}f(a-0) \to 0.$$

Dowód, że $B_n \to 0$ jest analogiczny. Zmieńmy najpierw wartość f w punkcie a, kładąc $f(a) = f(a-0)$, co w niczym nie zmienia współczynników Fouriera funkcji f. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\int_{-h}^{0} f(a+y)D_n(y)\,dy,$$

więc na mocy trzeciego twierdzenia o wartości średniej

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (f(a-h) - f(a))\int_{-h}^{c_n} D_n(y)\,dy = 0,$$

bo całki

$$\int_{-h}^{c_n} D_n(y)\,dy$$

są wspólnie ograniczone. □

4. Aproksymacja jednostajna

4.1. Lemat. *Dla każdej funkcji $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\delta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy = 0,$$

jednostajnie względem x.

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy istnieje liczba dodatnia c, ciąg $x_k \in [0, 2\pi]$ oraz ciąg indeksów $n_k \to \infty$, taki że

$$\left|\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_k-y)D_{n_k}(y)\,dy\right| \geqslant c.$$

Możemy dodatkowo założyć, że $x_k \to x_0$. Niech

$$A_k = \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_k-y)D_{n_k}(y)\,dy, \qquad B_k = \int_{\delta<|y|\leqslant\pi} f(x_0-y)D_{n_k}(y)\,dy$$

Wtedy

$$|A_k - B_k| \leqslant \frac{1}{\sin\delta/2}\int_{\delta<|y|\leqslant\pi} |f(x_n-y) - f(x_0-y)|\,dy \to 0,$$

co daje sprzeczność, bo $|A_k| \geqslant c$, natomiast $B_k \to 0$. □

4.2. Twierdzenie. *Jeśli $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ spełnia warunek Lipschitza, to szereg Fouriera f jest zbieżny do f jednostajnie.*

4.3. Wniosek. *Jeśli $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ jest kawałkami liniowa, to szereg Fouriera f jest zbieżny do f jednostajnie.*

4.4. Twierdzenie (Weierstrass). *Dla każdej funkcji $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ i każdego $\varepsilon > 0$, istnieje wielomian trygonometryczny T, taki że*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Skoro $f : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i $f(0) = f(2\pi)$, istnieje funkcja g kawałkami liniowa, taka że $g(0) = g(2\pi)$ oraz

$$|f(x) - g(x) < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Wynika to łatwo z jednostajnej ciągłości f. Rozszerzmy g do funkcji okresowej. Jej szereg Fouriera jest zbieżny do niej jednostajnie, więc dla pewnego n

$$|g(x) - S_n(g, x)| < \varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Ostatecznie

$$|f(x) - S_n(g, x)| < 2\varepsilon, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

gdzie $T(x) = S_n(g, x)$ jest żądanym wielomianem trygonometrycznym. □

5. Aproksymacja kwadratowa

5.1. *Jeśli* $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ *i* $\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = 0$*, to*

$$\int_a^b \Big|f(x) + g(x)\Big|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b g|(x)|^2 dx.$$

5.2. Wniosek (aproksymacja kwadratowa). *Niech* $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$*. Jeśli* T_N *jest wielomianem trygonometrycznym stopnia* N*, a* S_N *sumą częściową szeregu Fouriera funkcji* f*, to*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - T_N(x)\Big|^2 dx,$$

Dowód. Przez bezpośrednie całkowanie sprawdzamy, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - S_N(x)\Big) T_N(x)\, dx = 0, \tag{5.3}$$

więc na mocy (5.1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - T_N(x)\Big|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \Big|S_N(x) - T_N(x)\Big|^2 dx,$$

skąd natychmiast wynika nasza teza. □

Istnieje wiele różnych sposobów mierzenia, jak bardzo różnią się od siebie dwie funkcje. Na przykład

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

nazywa się *odległością jednostajną*. Jest też *odległość całkowa*

$$\|f - g\|_1 = \frac{1}{b - a} \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Jeszcze inną odległością jest

$$\|f - g\|_2 = \Big(\frac{1}{b - a} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}$$

zwana *średnią odległością kwadratową*. Wniosek 5.2 można więc sformułować i tak:

5.4. Wniosek. *Spośród wszystkich wielomianów trygonometrycznych stopnia* N *suma częściowa szeregu Fouriera* $S_N(f, x)$ *najlepiej przybliża funkcję* $f \in C_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ *w sensie średniej kwadratowej.*

5.5. Wniosek (tożsamość Parsevala). *Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$ zachodzi równość*

$$\frac{1}{2\pi}\int f(x)^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2$$

Dowód. Dla $\varepsilon > 0$ niech φ będzie funkcją kawałkami liniową, taką że

$$\|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Niech teraz T będzie wielomianem trygonometrycznym stopnia N, takim że $\|\varphi - T\|_\infty < \varepsilon$. Zatem

$$\|f-T\|_2 \leqslant \|f-T\|_1 \leqslant \|f-\varphi\|_1 + \|\varphi - T\|_1 \leqslant \varepsilon + \|\varphi - T\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Niech

$$S_N(x) = \sum_{|n|\leqslant N}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

będzie sumą częściową szeregu Fouriera. Bezpośrednim rachunkiem przekonujemy się, że

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)S_N(x)\,dx = \sum_{|n|\leqslant N}|\widehat{f}(n)|^2$$

i podobnie jak w (5.3)

$$\int_0^{2\pi} S_N(x)\Big(f(x) - S_N(x)\Big)\,dx = 0.$$

Zatem na mocy (5.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{|n|\leqslant N}|\widehat{f}(n)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(x) - S_N(x)\Big|^2\,dx,$$

co pokazuje, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx,$$

a z drugiej strony na mocy najlepszej aproksymacji kwadratowej

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{|n|\leqslant N}|\widehat{f}(n)|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(x) - T(x)\Big|^2\,dx \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2 + 4\varepsilon^2.$$

Wobec dowolności ε, to kończy dowód. □

5.6. *Uwaga.* Z naszego dowodu widać, że chociaż szereg współczynników Fouriera nie zawsze jest bezwzględnie sumowalny, to jednak zawsze jest *sumowalny z kwadratem.*

5.7. Przykład. Wróćmy do funkcji $u(x) = \mathbf{m}\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)$, dla której

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)^2\,dx = \frac{1}{4\pi^3}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

Wstawiając obliczone wcześniej wartości współczynników Fouriera do równania Parsevala, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{2}{3},$$

a stąd raz jeszcze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Zadania

1. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$ funkcja $F_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ jest wielomianem trygonometrycznym.

2. Dane są dwie funkcje $A, B \in C_{2\pi}$ o jednostajnie zbieżnych szeregach Fouriera. Pokaż, że

$$A(x)B(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{A}(k)\widehat{B}(n-k).$$

Uzasadnij zbieżność powyższych szeregów.

3. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Sprawdź, że współczynniki $a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)$ dla $n \in \boldsymbol{Z}_+$ oraz $b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$ dla $n \in \boldsymbol{N}$ wyrażają się wzorami

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

4. Znajdź szereg Fouriera funkcji a) $f_1(x) = \operatorname{sgn}(x)$, b) $f_2(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, gdzie $-\pi < a < b < \pi$, c) $f_3(x) = x(2\pi - x)$ określonych w przedziale $(-\pi, \pi]$ i przedłużonych okresowo na $\boldsymbol{R}$. Przeprowadź dyskusję zbieżności tych szeregów.

5. Rozwiń w szereg Fouriera funkcje $\sin^4 x$ i $|\sin x|$ i $\cos^m x$ dla $m \in \boldsymbol{N}$.

6. Załóżmy, że znamy wspólczynniki Fouriera $\widehat{f}(n)$ funkcji $f \in C_{2\pi}$. Znajdź wspólczynniki Fouriera funkcji pierwotnej F, takiej że $F(0) = 0$. Wykaż, że szereg Fouriera pierwotnej jest absolutnie zbieżny.

7. Niech $f \in C^1_{2\pi}$. Pokaż, że $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ dla każdego n.

8. Funkcję f definiujemy przez $f(x) = \sin x/2$ na odcinku $(-\pi, \pi]$ i przedłużamy do funkcji okresowej na $\boldsymbol{R}$. Znajdź jej szereg Fouriera i pokaż, że w każdym punkcie jest on zbieżny do f.

9. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Pokaż, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

10. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = e^x$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Oblicz jej współczynniki Fouriera, a następnie za pomocą tożsamości Parsevala wyprowadź wzór

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \sinh(2\pi)}{2\sinh^2 \pi}.$$

11. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2)}$.

12. Udowodnij, żę Lemat 4.1 pozostaje w mocy, gdy $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\boldsymbol{R})$.