#1. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 7.10, kolokwium 8.10

1. Udowodnij nierówności

$$1 - a \leqslant \frac{1}{1+a} \leqslant 1 - \frac{a}{1+a}, \qquad a > 0.$$

2. Pokaż, że $x + y = \max\{x, y\} + \min\{x, y\}$.

3. Pokaż, że $|x| + |y| = \max\{|x + y|, |x - y|\}$.

4. Oblicz wartości wyrażeń: $[(1 - \frac{1}{n})^n]$, $[n + n^{-1}]$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Wykaż, że jeśli $x \notin \boldsymbol{Z}$, to

$$[-x] = -[x] - 1, \qquad \mathbf{m}(-x) = 1 - \mathbf{m}(x).$$

6. Niech $x, y \in \boldsymbol{R}$. Udowodnij nierówności

$$[x + y] \geqslant [x] + [y], \qquad \left[\frac{x}{2}\right] \leqslant \frac{[x]}{2}, \qquad [-x] \leqslant -[x].$$

7. Pokaż, że $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \boldsymbol{Z}$.

8. Pokaż, że $\mathbf{m}(nx) = \mathbf{m}(n\mathbf{m}(x))$.

9. Pokaż, że jeśli $\mathbf{m}(x) < \frac{1}{N}$, to $\mathbf{m}(Nx) = N\mathbf{m}(x)$.

10. Udowodnij tożsamość Pascala

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

11. Wykaż, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ oraz $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

12. Dane są liczby $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$, takie że $a_0 = 1$ i $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla $0 \leqslant n < 100$. Pokaż przez indukcję, że $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$ i znajdź a_{100}.

13. Udowodnij przez indukcję nierówność

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx + (n - 1)x^2$$

dla $x > -1$ i $n \in \boldsymbol{N}$.

14. Dla $a, b \in \boldsymbol{R}$ wyprowadź tożsamość

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

15. Dane są liczby $a, b \in \boldsymbol{R}$ i liczba dodatnia $A > 0$ spełniające warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad a < b + A\varepsilon.$$

Korzystając z zasady epsilona, pokaż, że $a \leqslant b$.