

#10. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 13/01, kolokwium 14/01

1. Sprawdź, że dla $|x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

2. Funkcję $(1-x)^{-1}$ rozwiń w szereg potęgowy w punktach $a = 1/2$ i $b = 2$.
3. Przedstaw funkcje $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{2x}$ i $h(x) = \frac{e^x-1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $h(0) = 1$ w postaci szeregów potęgowych.
4. Przedstaw w postaci szeregu potęgowego funkcje $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ i $x \mapsto \frac{1+x}{(1-x)^2}$ dla $|x| < 1$.
5. Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{10^n n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \log^4 n x^n.$$

6. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności r . Wykaż, że promień zbieżności każdego z szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+3} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^4 a_n x^n$$

także wynosi r . Przy założeniu $0 < r < \infty$ określ promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n.$$

7. Wiadomo, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności $0 < r < \infty$. Wykaż, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{4n}$ wynosi $r^{1/4}$.
8. Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ spełniają oszacowanie $|a_n| \leq C n^4$. Pokaż, że dla każdego $|x| < 1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.
9. Oblicz promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{\binom{2n}{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n x^n}{(1+1/n)^{n^2}},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+1/n)^{(-1)^n n^2} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+1/n)^n x^{n^2}.$$

10. Oblicz promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ dla $\alpha > 0$.
11. Oblicz promień zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} x^{2n}.$$

12. Dany szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnego x_0 . Pokaż, że jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego $|x| < |x_0|$.
13. Oblicz sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ dla $|x| < 1$.