#12. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 5/02, kolokwium 12/03

1. Wykaż, że funkcje

$$x \mapsto x|x|, \qquad x \mapsto |x|^3, \qquad x \mapsto \sigma(x)\sin^2 x \qquad x \mapsto |x|\sin^2 x$$

$$x \mapsto \mathbf{m}(x)\sin^2 \pi x \qquad x \mapsto (\sin x + |\sin x|)^2 \qquad x \mapsto |\sin x|^{3/2}$$

są wszędzie różniczkowalne i oblicz ich pochodne.

2. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a i $f(a) > 0$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\Big)^n.$$

3. Wykaż przez różniczkowanie, że funkcja $f(x) = x\log(1+\frac{a}{x})$ jest ściśle rosnąca na $(0,\infty)$.

4. Wykaż, że funkcja $g(x) = \log_x(x+1)$ jest ściśle malejąca na $(1,\infty)$. Wywnioskuj stąd, że $\log_2 3 > \log_4 5$.

5. Pokaż, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4}+x) - \operatorname{arc\,tan}(\frac{\pi}{4}-x)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)} = \frac{32}{\pi^2+16},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi^2}{4} - \arccos x \cdot \arccos 2x}{\arcsin x} = \frac{3\pi}{2}.$$

6. Sprawdź, że $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$ dla $0 < x < e$.

7. Udowodnij, że $e^x < (1+x)^{1+x}$ dla $x > 0$.

8. Udowodnij, że $(\frac{x+1}{2})^{x+1} \leqslant x^x$ dla $x > 0$.

9. Znajdź lokalne ekstrema funkcji $(0,\infty) \ni x \mapsto x^x$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^n e^{-x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^4(1-x)^3$.

10. Dane są parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Znajdź minima lokalne i najmniejszą wartość funkcji a) $f(x) = \sum_{k=1}^n (x-k)^2$, b) $f(x) = \sum_{k=1}^n |x-a_k|$.

11. Znajdź największą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ na $\boldsymbol{R}$.

12. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $\boldsymbol{R} \ni x \to \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

13. Znajdź lokalne ekstrema funkcji: $(0,\infty) \ni x \mapsto x^{1/x}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto |x|e^{-x^2}$, $\boldsymbol{R} \ni x \mapsto x + |\sin 2x|$.

14. Niech $\alpha > 1$. Udowodnij nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha < \frac{x^a+y^a}{2}$ dla $x, y > 0$, $x \neq y$.

15. Udowodnij, że funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[c,d] \subset (a,b)$.

16. Funkcja $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ jest różniczkowalna. Ponadto $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)\backslash\{c\}$. Udowodnij, że f jest ściśle rosnąca w (a,b).

17. Dla jakich wartości $a \in \boldsymbol{R}$ funkcja $x \mapsto ax - \sin x$ jest ściśle rosnąca na $\boldsymbol{R}$?

18. Znajdź styczne do funkcji $0 \neq x \mapsto \log|x|$ w punktach o odciętych $x = 1$ i $x = -1$.

19. Niech $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$. Udowodnij, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na $\boldsymbol{R}$ i oblicz wszystkie jej pochodne w 0.

20. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $0 < x \mapsto \sqrt{x}$ wokół punktu $x = 2$.

21. Wiadomo, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $a \in \boldsymbol{R}$. Oblicz

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$