#12. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 12/03, kolokwium 19/03

1. Funkcję $x \to \log(1+x^3)$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x=0$.

2. Funkcję $x\sin x - \cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a wokół punktu $x=0$.

3. Rozwiń w szereg Taylora funkcje $f(x)=\sin x + \sinh x$ i $g(x)=\cos x + \cosh x$.

4. Dana jest różniczkowalna funkcja $f:(0,\infty)\to \boldsymbol{R}$, taka że $\lim_{x\to\infty} f(x)+f'(x)=0$. Pokaż, że $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. [W tym celu zauważ, że $f(x)=\frac{f(x)e^x}{e^x}$ i zastosuj regułę de l'Hospitala.]

5. Znajdź największą wartość funkcji $x\to \sin^{2m} x \cos^{2n} x$ na $\boldsymbol{R}$.

6. Znajdź minima lokalne funkcji $h(x)=\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|}$, gdzie $a,b\in\boldsymbol{R}$.

7. Różniczkując k-krotnie tożsamość $(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, wyprowadź rozwinięcie

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k.$$

8. Udowodnij nierówność

$$\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}},\qquad x>0.$$

9. Funkcja f jest ciągła w otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna poza x_0. Pokaż, że jeśli istnieje granica $f'(x)$, gdy $x\to x_0$, to f jest różniczkowalna w x_0 w sposób ciągły.

10. Wyprowadź *wzór Halphena*: $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$.

11. Funkcję $f(x)=\sin(\sin x)$ rozwiń we zór Taylora wokół $x=\pi$ z resztą R_5 w postaci Peano.

12. Oblicz n-tą pochodną funkcji $\frac{\log x}{x}$, $e^x\cos x$. Rozwiń te funkcje we wzór Taylora w dowolnym punkcie x z dziedziny. Reszty zapisz w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

13. Funkcje $f(x)=\log(1+x^3)$ i $g(x)=x\sin x+\cos x^2$ rozwiń we wzór Taylora do wyrazów kwadratowych dookoła dowolnego x z dziedziny, resztę R_2 zapisując w postaci Cauchy'ego i Lagrange'a.

14. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x-2x}{x-\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)-\sin^n x}{x^{n+2}}.$$

15. Udowodnij, że jeśli $a,c>0$, to

$$\inf_{x\in\boldsymbol{R}}\Big(\max\{|ax+b|,|cx+d|\}\Big)=\frac{|ad-bc|}{a+c}.$$

16. Niech $f:(a,b)\to(c,d)$ będzie bijekcją. Pokaż, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$ i $f'(x_0)\neq 0$, to f^{-1} jest dwukrotnie różniczkowalna w $y_0=f(x_0)$ i

$$(f^{-1})''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3}.$$

17. Dane są funkcje f i g różniczkowalne n razy w punkcie a. Udowodnij, że

$$(fg)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a).$$

18. Oblicz $(x^2e^x)^{(2003)}$ i $(x^{2002}e^{1/x})^{(2003)}$.