#14. Zadania z analizy B, ćwiczenia 19/03, kolokwium 26/03

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{\beta}(1+x)^\beta - x - \frac{\beta-1}{2}x^2$ jest ściśle rosnąca (malejąca) dla $x > -1$, jeśli $\beta > 2$ ($1 < \beta < 2$).

2. Rozwiń podane funkcje we wzór Maclaurina z resztą R_n w postaci Peano:

$$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad (n=5), \qquad e^{2x-x^2} \quad (n=6), \qquad \sqrt[3]{\sin x^3} \quad (n=13), \qquad \log\frac{\sin x}{x} \quad (n=6).$$

3. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^\infty \binom{1/2}{k} = \sqrt{2}$, $\quad \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{1/2}{k} = 0$, $\quad \sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Oszacuj błąd bezwzględny przybliżeń:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{2}),$$

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad (|x| \leqslant \frac{1}{10}), \qquad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

5. Oblicz granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right).$$

6. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje $\sin x \cos x$, $\sin^2 x$, $\cosh^2 x$.

7. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje arsh x i $\arccos x$.

8. Pokaż, że $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{-1/2}{k} = \frac{\pi}{2}$.

9. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Pokaż, że f ma wszędzie granice jednostronne.

10. Udowodnij, że jeśli $f : \boldsymbol{R} \to [0,\infty)$ jest parzystą funkcją podaddytywną, to

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x-y), \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

11. Pokaż, że funkcja $x \to |x|^\alpha$, gdzie $0 < \alpha \leqslant 1$, jest lipschitzowska na przedziale $[1,\infty)$.

12. Pokaż, że funkcja $f(x) = x^\alpha$ dla $\alpha > 1$ jest lipschitzowska na przedziale $[0,1]$.

13. Sprawdź, że funkcja $x \to x^x$ na przedziale $(0,1)$ jest podaddytywna.

14. Przypomnij dowód równoważności definicji ciągłości Cauchy'ego i Heinego i zaadaptuj go do przypadku jednostajnej ciągłości.

15. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n + x^n)}{n}, \qquad x > 0.$$

16. Dana jest ciągła funkcjia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Pokaż, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $x_n \to 0$ ciąg funkcyjny $f_n(x) = f(x_n + x)$ jest zbieżny jednostajnie do f.

17. Pokaż bezpośrednio, nie korzystając z twierdzenia Weierstrassa, że funkcję $x \to \sqrt{x}$ można aproksymować jednostajnie wielomianami na odcinku $[1/2, 3/2]$. W tym celu rozwiń tę funkcję w szereg Taylora wokół 1.

18. Niech $f : (a-\epsilon, b+\epsilon)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły. Udowodnij, że ciąg ilorazów różnicowych $f_n(x) = n\Big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big)$ jest zbieżny jednostajnie do f' na $[a,b]$.