#15. Zadania z analizy B, ćwiczenia 26/03, kolokwium 01/04

1. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągów funkcjyjnych a) $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ na $[0,1]$, b) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ na $(0,1]$.

2. Udowodnij, że funkcje a) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ na $\boldsymbol{R}$, b) $g(x) = e^{-x}$ na $[0,\infty)$, c) $h(x) = x^x \sin x$ na $[0,1]$ są jednostajnie ciągłe.

3. Udowodnij, że funkcja f ciągła na $\boldsymbol{R}$ i mająca granice liczbowe w $\pm\infty$ jest jednostajnie ciągła.

4. Niech $u_n \rightrightarrows u$ na I i niech $v \in C(I)$ będzie ograniczona. Pokaż, że $vu_n \rightrightarrows vu$.

5. Określ obszar zbieżności bezwzględnej i warunkowej szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n(1-x)^n$.

6. Pokaż, że jeśli *szereg Dirichleta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ jest zbieżny dla pewnego $x = x_0$, to jest zbieżny jednostajnie dla $x \geqslant x_0$.

7. Określ obszar zbieżności *szeregów Newtona*: $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{x}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\binom{x}{n}$.

8. Niech $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ będzie dowolną funkcją. Niech $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$. Pokaż, że f_n dąży jednostajnie do f na $[a,b]$.

9. Posługując się kryterium Weierstarassa, udowodnij, że podane szeregi są jednostajnie zbieżne: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, (-1 < x < \infty)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, (x \in \boldsymbol{R})$; $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, (x \geqslant 0)$.

10. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ jest ciągła i ma ciągła pochodną w $\boldsymbol{R}$.

11. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^x}$ w obszarze $x > 2$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną.

12. Uzasadnij jednostajną zbieżność podanych szeregów za pomocą kryteriów Abela i Dirichleta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $0 < \delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$, $x \geqslant 0$. Dlaczego pierwsze dwa szeregi nie są zbieżne jednostajnie na całym przedziale $[0, 2\pi]$? Podstaw $x_n = 1/n$.

13. Niech $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Pokaż, że ciągi funkcyjne $\{f_n\}$ i $\{f_n'\}$ są zbieżne punktowo, ale nieprawdą jest, że $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \ \ x \in \boldsymbol{R}$.

14. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-\eta, \eta]$, gdzie $0 < \eta < 1$, ale nie w $(-1,1)$.

15. Określ obszar zbieżności szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n x$, $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{4^n x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log^n(x+2)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+x^n}{1+3^n x^n}$.

16. Udowodnij, że podane niżej szeregi są jednostajnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2} \ \ (x \in \boldsymbol{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n} \ \ (x \geqslant 2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n|x-n|} \ \ (x \in \boldsymbol{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|} \ \ (x \in \boldsymbol{R}).$$

17. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(1+kx)}{kx^k}$ ma pochodne wszystkich rzędów.

18. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1 + \frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

19. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ jest zbieżny jednostajnie na $[1,\infty)$.