#16. Zadania z analizy B, ćwiczenia 01/04, kolokwium 08/04

1. Pokaż, że $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin nx \cdot \sin n^2 x\right| \leqslant 1$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ i każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

2. Dla funkcji f i g niech $f \vee g = \max\{f, g\}$, $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Pokaż, że

$$f + g = f \vee g + f \wedge g.$$

Udowodnij też, że jeśli f i g są ograniczone na przedziale domkniętym, to

$$\int_\star f + \int_\star g \leqslant \int_\star f \vee g + \int_\star f \wedge g.$$

3. Funkcja f jest całkowalna na odcinku I. Pokaż, że także funkcje $\sin f$ i $\sqrt{|f|}$ są całkowalne.

4. Pokaż, że wartości podanych niżej ciągów są równe sumom całkowym odpowiednio dobranych funkcji i w ten sposób oblicz granice tych ciągów:

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \qquad b_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}, \qquad c_n = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3 + k^3}, \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}.$$

5. Niech $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją ograniczoną, której punkty nieciągłości tworzą ciąg zbieżny. Pokaż, że funkcja f jest całkowalna.

6. Oblicz $\int_0^a [x] dx$, $\int --1^1 \sigma(x) x^4 dx$.

7. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ jest całkowalna na odcinku $[-1, 1]$.

8. Wiedząc, że funkcja $f : [-1.1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna, udowodnij całkowalność funkcji $g(x) = f(|x|)$ i pokaż, że $\int_{-1}^{1} g(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

9. Funkcja $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ jest ciągła i nieujemna. Udowodnij, że $\int_a^b f(x) dx = 0$ pociąga $f = 0$.

10. Niech $f \in C([a, b])$. Udowodnij, że $\int_I f = 0$ dla każdego odcinka domkniętego $I \subset [a, b]$ pociąga $f = 0$.

11. Wykaż, że jeśli funkcja $g : [a, b] \to [0, 1]$ jest całkowalna, a $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ lipschitzowska, to $f \circ g$ jest całkowalna.

12. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi.$$

13. Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$. Niech f będzie funkcją Riemanna. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = 0$.

14. Udowodnij, że funkcja Riemanna $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ jest całkowalna i oblicz jej całkę.

15. Czy każdą funkcję ciągłą na odcinku domkniętym można przedłużyć do funkcji ciągłej na całej prostej?

16. Oblicz pochodne funkcji $F(x) = \int_0^x \sin tx \, dt$, $G(x) = \int_0^x e^{tx} dt$.

17. Wiedząc, że funkcja $g : [0, \infty)$ jest rosnąca, wykaż że funkcja $h(x) = \int_0^x g(t) dt$ jest wypukła, a funkcja $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ jest rosnąca.

18. Oblicz całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}, \int \frac{x^2 dx}{1 - x^2}, \int \operatorname{tg}^2 x dx, \int \operatorname{tgh}^2 x dx, \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx, \int \sqrt[3]{1 - 3x} \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}, \int \frac{dx}{2 + 3x^2}, \int \frac{dx}{2 - 3x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}.$$