#17/18. Zadania z analizy B, ćwiczenia 03/04 i 10/04, kolokwium 17/04

1. Pokaż, że ciąg $\varphi_n(x) = (1 + \frac{x}{x})^n e^{-2x}$ jest zbieżny monotonicznie i jednostajnie.

2. Znajdź całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx, \int \frac{x^2 dx}{x^4+1}, \int \frac{x^3 dx}{x^4+1}, \int \frac{dx}{x^4+1}, \int \frac{x+1}{x^4+1}\,dx.$$

[Aby obliczyć pierwszą całkę, skorzystaj z podstawienia $y = x - 1/x$.]

3. Całkując przez części znajdź

$$\int x^n \log x\,dx, \int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx, \int \sqrt{x}\log^2 x\,dx, \int \arctan x\,dx, \int \arcsin x\,dx,$$

$$\int x \arctan x, dx, \int \log(x + \sqrt{1+x^2})dx, \int \sin x \log(\operatorname{tg} x)dx, \int x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx.$$

4. Scałkuj funkcje wymierne:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx, \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \int \frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2}, \int \frac{dx}{x^3-1},$$

$$\int \frac{dx}{x^4-1}, \int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}, \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \int \frac{x^n}{1+x^{n+1}}.$$

5. Scałkuj funkcje trygonometryczne:

$$\int \cos^5 x\,dx, \int \sin^6 x\,dx, \int \sin^2 x \cos^4 x\,dx, \int \sin^4 x \cos^5 x\,dx, \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \int \sin 5x \cos x\,dx, \int \frac{dx}{\sin x - 1}, \int \frac{dx}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$$

6. Oblicz a) $\int_0^n [x] \sin \pi x\,dx$, b) $\int_0^m \mathbf{m}(x) \sin \pi x\,dx$.

7. Korzystając ze wzoru Wallisa, zbadaj zbieżność szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ na końcach przedziału zbieżności.

8. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^a \sin nx\,dx = 0$ dla każdego $a \in \boldsymbol{R}$.

9. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

10. Korzystając ze wzoru Stirlinga udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot \left(\frac{e}{2n}\right)^n = \sqrt{2}.$$

11. W pole pod hiperbolą $y = 1/x$ na odcinku $[n, n+1]$ wpisz dwa trapezy wyznaczone przez proste $x = n$, $x = n + 1/2$ i $x = n + 1$ oraz styczne do hiperboli w punktach $x = n + 1/4$, $x = n + 3/4$ i prostą $y = 0$, a następnie porównując sumę ich pól z polem pod hiperbolą, udowodnij nierówność

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1/2} + \frac{1}{n+3/4}\right) > \frac{1}{n+1/2}.$$

12. Sprawdź, że $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-1/2}{n}^{7/3} < \infty$.

13. Niech $a > |b|$. Pokaż, że $(a+b)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} a^{\alpha-n} b^n$ dla każdego $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

14. Oblicz całkę
$$\int_0^1 x^n \log^n x\,dx, \qquad n \geqslant 0.$$

15. Oblicz na dwa sposoby całkę nieoznaczoną $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ stosując podstawienie a) Eulera, b) hiperboliczne. Porównaj otrzymane wyniki.

16. Oblicz całki
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx,$$

17. Niech $f \in C([0,\pi])$. Pokaż, że istnieje przedział $[a,b] \subset [0,\pi]$, taki że $\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

18. Zapisz w postaci całkowej resztę R_n rozwinięcia Maclaurina funkcji wykładniczej.

19. Korzystając z postaci całkowej reszty Taylora funkcji $f \in C^m(a)$, wyprowadź znany wzór
$$\frac{d}{dx}R_m(f)(x) = R_{m-1}(f')(x), \qquad m \geqslant 2.$$

20. Stosując podstawienie $\frac{1}{z} = 1 + x^n$, pokaż, że $\int_0^a \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{1+a^n}}^1 z^3(1-z)^{\frac{1}{n}-1}dz$.

21. Zbuduj przykład ciągu funkcji ciągłych f_n na odcinku $[0,1]$ zbieżnego punktowo do zera, dla którego ciąg całek $\int_0^1 f_n$ nie dąży do zera. [W tym celu zmodyfikuj przykład podany na wykładzie.]

22. Oblicz z definicji całki niewłaściwe:
$$\int_0^\infty e^{-x}dx, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

23. Wykaż, że podane całki są rozbieżne:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\infty \sin x\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{e^x}{x^{100}}dx, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{\log^4 x}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}.$$

24. Oblicz całki
$$\int_0^1 \log x dx, \quad \int_0^\infty xe^{-x}dx, \quad \int_0^1 x\log x dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx, \quad \int_0^\infty xe^{-x}\sin x\,dx.$$

25. Uzasadnij zbieżność całek
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}, \quad \int_0^1 \frac{xdx}{e^x-1}, \quad \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^4}dx.$$