#19. Zadania z analizy B, ćwiczenia 23/04, kolokwium 7/05

1. Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{Z}$ funkcja $F_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ jest wielomianem trygonometrycznym.

2. Dane są dwie funkcje $A, B \in C_{2\pi}$ o jednostajnie zbieżnych szeregach Fouriera. Pokaż, że

$$A(x)B(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{A}(k)\widehat{B}(n-k).$$

Uzasadnij zbieżność powyższych szeregów.

3. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Sprawdź, że współczynniki $a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n)$ dla $n \in \boldsymbol{Z}_+$ oraz $b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$ dla $n \in \boldsymbol{N}$ wyrażają się wzorami

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

4. Znajdź szereg Fouriera funkcji a) $f_1(x) = \operatorname{sgn}(x)$, b) $f_2(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, gdzie $-\pi < a < b < \pi$, c) $f_3(x) = x(2\pi - x)$ określonych w przedziale $(-\pi, \pi]$ i przedłużonych okresowo na $\boldsymbol{R}$. Przeprowadź dyskusję zbieżności tych szeregów.

5. Rozwiń w szereg Fouriera funkcje $\sin^4 x$ i $|\sin x|$ i $\cos^m x$ dla $m \in \boldsymbol{N}$.

6. Załóżmy, że znamy współczynniki Fouriera $\widehat{f}(n)$ funkcji $f \in C_{2\pi}$. Znajdź współczynniki Fouriera funkcji pierwotnej F, takiej że $F(0) = 0$. Wykaż, że szereg Fouriera pierwotnej jest absolutnie zbieżny.

7. Niech $f \in C^1_{2\pi}$. Pokaż, że $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ dla każdego n.

8. Funkcję f definiujemy przez $f(x) = \sin x/2$ na odcinku $(-\pi, \pi]$ i przedłużamy do funkcji okresowej na $\boldsymbol{R}$. Znajdź jej szereg Fouriera i pokaż, że w każdym punkcie jest on zbieżny do f.

9. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Pokaż, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

10. Niech $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ będzie zadana wzorem $f(x) = e^x$ w przedziale $(-\pi, \pi]$. Oblicz jej współczynniki Fouriera, a następnie za pomocą tożsamości Parsevala wyprowadź wzór

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \sinh(2\pi)}{\sinh^2 \pi}.$$

11. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2)}$.