#2. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 14.10, kolokwium 15.10

1. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c, d > 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4.$$

2. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} x^k$ na półprostej $x > 0$ i punkt, w którym funkcja przyjmuje tę wartość.

3. Wykaż, że dla $a, b, c > 0$

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geqslant 6.$$

4. Wykaż, że średnia harmoniczna jest zawsze nie większa od średniej geometrycznej tych samych liczb, a równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_k są identyczne.

5. Niech L będzie obwodem, a P polem trójkąta. Udowodnij nierówność $L^2 > 16P$ lub nawet $L^2 > 4\sqrt{27}P$.

6. Niech $a \in \boldsymbol{R}, b > 0$. Uzasadnij nierówność

$$\frac{a}{b} \leqslant a^2 + \frac{1}{4b^2}.$$

7. Niech $a, b, c \geqslant 0$. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leqslant a + b + c + d.$$

8. Niech $m, n \in \boldsymbol{N}$. Pokaż, że

$$m(n-m) \leqslant \frac{n^2}{4},$$

przy czym równość jest zrealizowana tylko wtedy, gdy n jest parzyste.

9. Wykaż, że jeśli $x \leqslant y$ dla każdych $x \in A$, $y \in B$, to $\sup A \leqslant \inf B$. Czy prawdziwe jest wynikanie odwrotne?

10. Wykaż, że $\emptyset \neq A \subset B$ pociąga $\sup A \leqslant \sup B$ oraz $\inf B \leqslant \inf A$.

11. Udowodnij, że jeśli A, B są ograniczone, to

$$\sup(-A) = -\inf A, \qquad \sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

oraz

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

12. Dane są funkcje $f(x) = 1 - |x|$ oraz $g(x) = 1 - |1-x|$. Pokaż, że

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}(f(x) + g(x)) < \sup_{x\in\boldsymbol{R}} f(x) + \sup_{x\in\boldsymbol{R}} g(x).$$

13. Oblicz $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \quad \sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}, \quad \inf\left\{\frac{n-1}{n} : n \in \boldsymbol{N}\right\}.$

14. Udowodnij, że jeśli A i B są zbiorami ograniczonymi, to

$$\sup A - \inf B = \sup(A - B),$$

gdzie

$$A - B = \{x - y : x \in A,\ y \in B\}.$$