## #3. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 21, kolokwium 22.10

**1.** Ciąg $(a_n)$ jest ściśle rosnący. Pokaż, że ciąg $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ jest też ściśle rosnący.

**2.** Niech $\xi$ będzie liczbą niewymierną. Pokaż, że ciąg $a_n = \mathbf{m}(n\xi)$ jest różnowartościowy.

**3.** Udowodnij, że $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

**4.** Udowodnij, że $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**5.** Uzasadnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$.

**6.** Wykaż, że ciąg $e_n = (1-\frac{1}{n})^{n-1}$ jest malejący, natomiast ciąg $f_n = (1-\frac{1}{n})^n$ nie jest.

**7.** Korzystając z nierówności Bernoulli'ego, sprawdź, że ciąg $u_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący, a ciąg $v_n = (1-\frac{1}{n})^n$ – rosnący.

**8.** Wprost z definicji wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{7n-3} = \frac{6}{7}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

**9.** Pokaż, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ jest $(1+\frac{1}{n})^{2n} < \sum_{k=0}^{2n}\frac{2^k}{k!}$.

**10.** Udowodnij nierówności

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

**11.** Niech $< x < 1$ będzie liczbą rzeczywistą o zapisie dziesiętnym $0.c_1c_2c_3\ldots$. Sprawdź, że $c_n = \left[10\cdot\mathbf{m}(10^{n-1}x)\right]$. Kiedy ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny?

**12.** Niech $a_n > 0$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wykaż, że $a_n \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

**13.** Niech $\varphi$ będzie dowolnym wielomianem. Wykaż, że $\frac{\varphi(n)}{2^n} \to 0$, gdy $n \to \infty$.

**14.** Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, a $\{b_n\}$ zbieżny do 0. Pokaż, że $a_nb_n \to 0$.

**15.** Wiedząc, że $a_n \to a$, znajdź granice ciągów $b_n = a_{n+1} - a_n$, $c_n = a_n + 2a_{n+1}$, $d_n = |a_n|$, $e_n = a_na_{n+1}$, $f_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$.

**16.** Wiemy, że $a_n \to a$. Czy ciąg $b_n = [a_n]$ ma granicę?

**17.** Wykaż, że

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \to 1, \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0.$$

Pierwszy ciąg jest rosnący, a drugi – malejący. Uzasadnij.

**18.** Dany jest ciąg $a_n \to a$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$. Wykaż, że $b_n \to b = a - a_1$. Czy nie przeczy to tezie, że pierwszy wyraz ciągu nie może mieć wpływu na wartość granicy?