#4. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 28, kolokwium 29.10

1. Wykaż, że $\sqrt[n^2]{n} \to 1$.

2. Wykaż, że $0 < \left(\frac{3001}{3000}\right)^{3001} - e < 10^{-3}$.

3. Oblicz granice ciągów

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}, \qquad b_n = \sqrt[n^2]{2^n + 5^n}, \qquad c_n = (2^n + 5^n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

4. Udowodnij, że $\sqrt[n^2]{n!} \to 1$.

5. Wiedząc, że $0 < a < b$, oblicz granicę ciągu

$$x_n = \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}.$$

6. Pokaż, że ciągi $\{n^{1/n}\}_{n=3}^{\infty}$ i $\{n!^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ są monotoniczne.

7. Niech $a > 1$ i niech $a_n = [a^n]$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

8. Znajdź liczbę wymierną w przedziale $(2\frac{7}{10}, e)$.

9. Który z podanych ciągów szybciej dąży do nieskończoności: a) $a_n = n!$, $b_n = n^n$; b) $a_n = 3^n$, $b_n = 2^n n^4$; c) $a_n = \frac{n!}{4^n}$, $b_n = 2^n$?

10. Niech $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_n^{-1})$. Znajdź granicę tego ciągu.

11. Oblicz $\sup_{m\in \boldsymbol{N}} \inf_{n\in \boldsymbol{N}} \frac{m}{m+n}$ oraz $\inf_{n\in \boldsymbol{N}} \sup_{m\in N} \frac{m}{m+n}$.

12. Wykaż, że $\min_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = [\frac{n}{2}]!(n - [\frac{n}{2}])!$ i $\max_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)! = n!$.

13. Oblicz granice $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$ i $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{\sqrt{n!}})^{\sqrt{n!}}$.

14. Wykaż, że jeśli $p_n, q_n \in \boldsymbol{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi$ jest liczbą niewymierną, to $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

15. Pokaż, że z każdego ciągu zbieżnego $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$, taki że $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < 2^{-k}$ dla $k \in \boldsymbol{N}$.

16. Wiadomo, że $a_{n+1} - a_n \to a$. Pokaż, że $\frac{a_n}{n} \to a$.

17. Niech $a_n \to a$ i $b_n \to b$. Wykaż, że wtedy $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$.

18. Udowodnij, że jeśli $0 < a_n \to a$, to $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to a$. Jeśli natomiast $a_n \to \infty$, to $b_n \to \infty$.

19. Znajdź zbiór A punktów skupienia ciągów

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = \frac{2(-1)^n n + 3}{n+1}, \quad c_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}, \quad d_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

20. Dany jest ułamek nieskracalny $x = p/q \in (0, 1)$. Znajdź wszystkie punkty skupienia ciągu $a_n = \mathbf{m}(nx)$.

21. Dany jest ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Budujemy nowy ciąg $b_n = \sup_{k\geqslant n} a_k$. Sprawdź, że ciąg $\{b_n\}$ jest malejący i ograniczony od dołu.

22. Pokaż, że jeśli $|u_{n+1} - u_n| < 2^{-n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}$, to ciąg $\{u_n\}$ jest zbieżny.