#5. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 4.11, kolokwium 12.11

1. Niech $a > 0$. Pokaż, że dla wszystkich $x, y \in \boldsymbol{R}$ jest $(a^x)^y = a^{xy}$.

2. Wyprowadź własności 1) – 3) funkcji logarytmicznej podane na wykładzie.

3. Pokaż, że

$$\log_x y = \frac{\log x}{\log y}, \qquad x^{\log y} = y^{\log x}, \qquad x, y > 0.$$

4. Oblicz granice ciągów

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\log^2 n}{n^{1/4}}, \qquad \sqrt[n]{\log n}, \quad \frac{\log^2 n}{\log n^2}.$$

5. Korzystając z nierówności Bernoulliego, pokaż, że funkcja $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ jest ściśle rosnąca dla $x \geqslant 1$ i ściśle malejąca dla $0 < x \leqslant 1$. Znajdź minimum tej funkcji.

6. Znajdź maksimum funkcji $f(x) = x^x$ na półprostej dodatniej. W tym celu w nierówności $e^y \geqslant ey$ podstaw $y = x/e$.

7. Czy $a_n^n \to 0$, jeśli $a_n \to 0$? Rozważ ciąg $a_n = 1/n$.

8. Wykaż, że $\sqrt[n]{e}$ jest liczbą niewymierną dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$.

9. Przeprowadź dyskusję zbieżności ciągu $u_n = (1 + \frac{1}{n^p})^{n^q}$ w zależności od $p, q > 0$.

10. Udowodnij, że dla każdego $\alpha > 0$ jest $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$.

11. Wyjaśnij schemat

$$\log n << n^{\frac{1}{k}} << n^k << 2^n << n! << n^n.$$

12. Udowodnij nierówność $e^x \geqslant ex$ dla $x > 0$. Pokaż też, że równość zachodzi jedynie dla $x = 1$. W tym celu w znanej nierówności $e^y \geqslant 1 + y$ podstaw $y = x - 1$.

13. Wyprowadź nierówność $\log(1 + x) > \frac{x}{1+\frac{1}{2}x}$ dla $x > 0$.

14. Pokaż, że $\log(1 + y) < \frac{1}{\alpha} y^\alpha$ dla $y > 0$ i $0 < \alpha \leqslant 1$.

15. Wykaż, że $\cosh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sinh x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

16. Wiedząc, że $a_n \to a$, oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n.$$

17. Udowodnij że funkcje $\sinh : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ i $\cosh : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ są ściśle rosnące i wyprowadź wzory na funkcje odwrotne:

$$\sinh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right), \qquad \cosh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

18. Udowodnij, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ stała Eulera γ spełnia nierówności

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n + 1) < \gamma < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$