

#6. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 25.11, kolokwium 26.11

1. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x^2}$.
2. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log \frac{x}{a}}{x-a}$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$.
3. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$, gdzie $n, m \in \mathbf{N}$.
4. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$.
5. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\log \frac{1}{x})^{\log x}$.
6. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\log(1+x)}$.
7. Oblicz granice: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$,
 $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.
8. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, gdzie $a > b$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.
9. Oblicz granice $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log |x|$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \operatorname{tg} x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}$.
10. Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+1/x)^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$.
11. Znajdź granice jednostronne funkcji $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ w punkcie $x = 0$.
12. Pokaż, że dla każdego niestałego wielomianu f jest $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$.
13. Udowodnij, że każdy wielomian φ stopnia 3 przyjmuje wartości różnych znaków. Korzystając z własności Darboux, wywnioskuj, że φ ma pierwiastek.
14. Podaj przykład wielomianu stopnia 4, który nie ma pierwiastka. A co powiesz o wielomianach stopnia 5?
15. Znajdź granice

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{7/2}-1}{x^{5/2}-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha-x^\beta}{x^\gamma-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha-1-\alpha \log x}{(x-1)^2},$$
gdzie $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Pamiętaj, że $e^z = 1 + z + z^2/2 + r_3(z)$, gdzie $|r_3(z)| \leq \frac{1}{4}|z|^3$ dla $|z| \leq 1$.
16. Pokaż, że funkcje $f(x) = \sin(\mathbf{m}(x)\pi)$ i $g(x) = [x] \sin \pi x$ są ciągłe.
17. Pokaż, że funkcje $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ i $G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ są ciągłe w każdym punkcie, w którym zarówno f , jak i g jest ciągła.
18. Pokaż, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma w przedziale $0 < x < 1$ przynajmniej jedno rozwiązanie.
19. Korzystając z twierdzenia Darboux pokaż, że równanie $x2^x = 1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.
20. Dane jest równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $b > 0$ i c są ustalone. Pokaż, że dla dostatecznie małych $|a| > 0$ równanie to ma dwa pierwiastki $x_1(a) < x_2(a)$. Znajdź $\lim_{a \rightarrow 0} x_1(a)$ i $\lim_{a \rightarrow 0} x_2(a)$.
21. Udowodnij, że funkcja $x \rightarrow x^{\frac{1}{1-x}}$ jest ściśle rosnąca na $(0, 1)$.