#7. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 02.12, kolokwium 03.12

1. Stosując kryterium porównawcze, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} 4^{-n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt[4]{n^5}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$$

2. Stosując kryterium d'Alemberta, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}.$$

3. Stosując kryterium Cauchy'ego, udowodnij zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arsh}^n \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

4. Niech będą dane dwa ciągi $a_n > 0$ i $b_n > 0$, takie że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Pokaż, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są równocześnie zbieżne lub rozbieżne. Pokaż tym sposobem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

5. Zbadaj zbieżność szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log(n+1)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1/n)}{\log^2(n+1)}$.

6. Dla jakich $x > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log x}$ jest zbieżny?

7. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$.

8. Niech $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Czy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n^n$ jest zbieżny? A szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n$?

9. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

10. Niech $a_n \geqslant 0$. Udowodnij, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, a ciąg $\{d_n\}$ jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ jest zbieżny.

11. Udowodnij, że dla $|q| < 1$ jest $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$.

12. Niech $a_0 = e$ i $a_{n+1} = \sin a_n$. Udowodnij, że a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny; b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ jest zbieżny.

13. W szeregu harmonicznym stawiamy znak minus przy wyrazach o numerach postaci $n = 2^k$, a pozostałe wyrazy pozostawiamy bez zmian. Wykaż, że tak otrzymany szereg jest rozbieżny.

14. Oblicz sumę szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{-k}$.