#8. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 09/10.12, kolokwium 07.12

1. Wykaż, że ciąg $a_n = \sin n$ nie dąży do zera.

2. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne bezwzględnie. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sqrt{|a_n b_n|}$ jest zbieżny.

3. Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

4. Podaj przykład zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, takiego że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

5. Pokaż, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o nieujemnych wyrazach jest rozbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny.

6. Ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność: Dla każdego ciągu liczb $s_n \in \{-1, 1\}$ szereg $\sum_{n=1} s_n a_n$ jest zbieżny. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

7. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\binom{1/2}{n}\right| q^n, (q > 0) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}^2, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log \frac{n+1}{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

8. Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{n \log^2 n} < \infty.$$

9. Udowodnij, że $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, a następnie pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n} = \infty$.

10. Dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{2k\pi : k \in \boldsymbol{Z}\}$ udowodnij wzór

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

11. Udowodnij, że podane szeregi mają ograniczone sumy częściowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n-1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^2 n.$$

12. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^2 n \log(1+\frac{1}{n}).$$

13. Dane są zbieżne ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, przy czym ten drugi jest jeszcze monotoniczny. Korzystając z kryterium Abela, udowodnij, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) b_n^2$$

są zbieżne.