#9. Zadania z analizy IB, ćwiczenia 07/01, kolokwium 14/01

Uwaga: 07/01 to „poniedziałek”

1. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \log n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \log n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\gamma_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big).$$

2. Udowodnij, że podane szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[n]{a}}{n}, \quad (a>0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{arc\,tg} n}{n}.$$

3. Oblicz sumy nieskończone otrzymane w wyniku permutacji wyrazów szeregu anharmonicznego:

$$A = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

$$B = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots$$

4. Nich $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ będzie permutacją liczb naturalnych. Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)} = \infty$.

5. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}$.

6. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\pi}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!},$$

7. Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

8. Sprawdź, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e-1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} = e-1.$$

9. Dany jest malejący ciąg $a_n > 0$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pokaż, że $na_n \to 0$.

10. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n^4}$.

11. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \sin\frac{1}{n}$$

jest zbieżny warunkowo.

12. Dany jest malejący ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich. Pokaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to $na_n \to 0$.