UWAGA: Zaczniemy od wykładu 5 października (czwartek) o godz. 10.15 w sali 711

Teoria dystrybucji – wykład do wyboru

Literatura:

1. W. Rudin, *Analiza Funkcjonalna*,
2. L. Hörmander, *The Analysis of Linear PDO*, tom I,
3. V. C. Vladimirov, *Obobščennye funkcii v matematičeskoj fizike*,
4. H. Marcinkowska, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe.*

Definicje są po to, by ułatwiać wysławianie się i porozumiewanie. Z punktu widzenia analizy podobną rolę pełni *teoria dystrybucji.* Z formalnego punktu widzenia można ją uznać za część teorii lokalnie wypukłych wektorowych przestrzeni topologicznych. W gruncie rzeczy chodzi jednak o stworzenie wygodnego języka dla teorii równań różniczkowych cząstkowych, który pozwala ominąć wiele pozornych trudności teoretycznych i wiele prawdziwych trudności komunikacyjnych.

Teoria dystrybucji wyrasta z „funkcjonalnego” sposobu patrzenia na obiekty analizy. Dobrym punktem wyjścia jest twierdzenie Riesza, zgodnie z którym każdą ograniczoną znakowaną miarę borelowską $\mu \in M(\mathbf{R}^n)$ można utożsamić z ciągłym funkcjonałem ϕ na przestrzeni $C_0(\mathbf{R}^n)$ znikających w nieskończoności funkcji ciągłych z normą supremum. Mamy wtedy

$$\phi_\mu(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mu(dx), \qquad f \in C_0(\mathbf{R}^n),$$

gdzie, jak dobrze wiadomo, przyporządkowanie

$$M(\mathbf{R}^n) \ni \mu \to \phi_\mu \in C_0^\star(\mathbf{R}^n)$$

jest izometrią.

Jest jasne, że jeśli w powyższym przykładzie przestrzeń $C_0(\mathbf{R}^n)$ zastąpimy jej gęstą podprzestrzenią wyposażoną w mocniejszą topologię, na przykład przestrzenią Schwartza $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ szybko znikających w nieskończoności fukcji gładkich z odpowiednią rodziną półnorm, jako przestrzeń sprzężoną otrzymamy dużo bogatszą przestrzeń, w naszym przypadku $\mathcal{S}^\star(\mathbf{R}^n)$, zawierającą w sposób naturalny wszystkie znakowane miary ograniczone i funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a. W szczególności elementami $\mathcal{S}^\star$ będą wszystkie funkcjonały postaci

$$f \to D^\alpha f(0),$$

czyli pochodne cząstkowe wszystkich rzędów ocenione (na przykład) w zerze. Ta przestrzeń nazywa się przestrzenią *dystrybucji temperowanych.*

Na przestrzeń dystrybucji można rozszerzyć wiele operacji analizy, takich jak mnożenie, splot, różniczkowanie, całkowanie nieoznaczone. Dotyczy to także transformaty Fouriera, która staje się automorfizmem przestrzeni Schwartza $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

Aby nie poprzestać na ogólnikach, oto interpretacja twierdzenia Gaussa-Greena w języku teorii dystrybucji:

Niech $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ będzie obszarem z gładkim brzegiem $\partial\Omega$. Niech χ_Ω oznacza funkcję charakterystyczną Ω. Wówczas

$$D_j \chi_\Omega = \mathbf{n}_j dt,$$

gdzie $\mathbf{n}$ *jest wektorem normalnym zewnętrznym do* $\partial\Omega$*, a* dt *miarą Lebesgue'a powierzchni* $\partial\Omega$.

Innymi słowy, pochodną cząstkową (nieróżniczkowalnej) funkcji χ_Ω jest miara skupiona na brzegu obszaru, która jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a brzegu, a jej gęstością jest odpowiednia współrzędna wektora normalnego. W najprostszym przypadku, gdy $\Omega = (a,b) \subset \mathbf{R}$ oznacza to, że pochodna dystrybucyjna funkcji charakterystycznej odcinka otwartego jest równa mierze atomowej skupionej w dwóch punktach:

$$\mu(f) = f(b) - f(a).$$

A oto program wykładu w zarysie:

1) Dystrybucje jednej zmiennej, główne idee teorii,
2) Dystrybucje wielu zmiennych, różniczkowanie,
3) Nośnik i lokalne własności,
4) Przejścia graniczne w teorii dystrybucji,
5) Struktura dystrybucji,
6) Splot dystrybucji,
7) Transformata Fouriera,
8) Rozwiązania fundamentalne równań różniczkowych cząstkowych,

Serdecznie zapraszam!

Paweł Głowacki