Zadania z teorii dystrybucji #1 **9/10/2017**

1. Dana jest przestrzeń wektorowa X z przeliczalną i rozdzielającą punkty rodziną półnorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Udowodnij, że rodzina skończonych przekrojów kul $V_n(\varepsilon) = \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\}$ tworzy bazę topologii wyznaczonej przez tę rodzinę półnorm.

2. Dane są topologiczne przestrzenie wektorowe X i Y oraz odwzorowanie liniowe $T : X \to Y$. Załóżmy, że X ma przeliczalną bazę otoczeń zera. Pokaż, że T jest ciągłe, wtedy i tylko wtedy gdy przekształca zbiory ograniczone w zbiory ograniczone. (Tylko jedna z implikacji wymaga założenia o przeliczalności bazy.)

3. W przestrzeni wektorowej z przeliczalną i rozdzielającą punkty rodziną półnorm $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definiujemy nową rodzinę półnorm, kładąc

$$q_n(x) = \max_{1 \le k \le n} p_k(x), \qquad x \in X.$$

Pokaż, że rodzina ta wyznacza tę samą topologię.

4. Niech $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ będzie niepustym zbiorem otwartym, a $K_n \subset \Omega$ takim ciągiem zbiorów zwartych, że $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ oraz $\Omega = \bigcup_n K_n$. Udowodnij, że przestrzeń $X = C^\infty(\Omega)$ z rodziną półnorm

$$p_n(f) = \max_{1 \le |\alpha| \le n} \sup_{x \in K_n} |D^\alpha f(x)|$$

jest przestrzenią Frécheta. Zauważ, że inny wybór ciągu (K_n) prowadzi do równoważnej rodziny półnorm.

5. Dany jest ciąg funkcji $\varphi_k \in C^\infty(\Omega)$. Udowodnij, że istnieją liczby $c_k > 0$, takie że szereg $\sum_k c_k \varphi_k$ jest zbieżny w $C^\infty(\Omega)$.

6. Wykaż, że każda topologiczna przestrzeń wektorowa posiada bazę symetrycznych i zrównoważonych otoczeń zera.

7. (*) Zakładamy, że topologiczna przestrzeń wektorowa X posiada przeliczalną bazę wypukłych i zrównoważonych otoczeń zera. Wykaż, że w X istnieje przeliczalna rodzina półnorm, która wyznacza tę samą topologię.

Zasady zaliczenia

Aby zaliczyć semestr ćwiczeń słuchacz winien spełnić następujące warunki:
1) warunek dobrej frekwencji (co najwyżej 3 nieusprawiedliwione nieobecności),
2) warunek aktywności (przynajmniej 5 konstruktywnych obecności przy tablicy).

Spełnienie warunków 1) i 2) gwarantuje stopień dostateczny. Słuchacz, który spełnił oba warunki i chciałby poprawić proponowaną ocenę końcową, może przystąpić do kolokwium zaliczeniowego.

(pg)