**Zadania z teorii dystrybucji #2** **16/10/2017**

**1.** Udowodnij, że każde otoczenie otwarte zera $V$ w topologicznej przestrzeni wektorowej zawiera a) otwarte otoczenie zera $U$, takie że $U + U \subset V$, b) otwarte otoczenie zera $W$, takie że $\overline{W} \subset V$.

**2.** Niech $M \subset \boldsymbol{R}^N$ będzie mierzalny i niech $f : [a, b] \times \boldsymbol{R}^N$ będzie taka, że $f(t, \cdot) \in L^1(M)$ dla $t \in [a, b]$ oraz $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$, gdzie $g \in L^1(M)$, dla $(t, x) \in [a, b] \times M$. Wykaż, że funkcja

$$F(t) = \int_M f(t, x)\, dx$$

jest ciągła.

**3.** Niech $M \subset \boldsymbol{R}^N$ będzie mierzalny i niech $f : [a, b] \times \boldsymbol{R}^N$ będzie taka, że

a) $f(\cdot, x) \in C^1([a, b])$ dla p.w. $x \in M$,

b) $f(t, \cdot) \in L^1(M)$ dla $t \in [a, b]$,

c) $|\partial_t f(\cdot, x)| \leq g(x)$, gdzie $g \in L^1(M)$.

Wykaż, że funkcja $F(t) = \int_M f(t, x)\, dx$ jest klasy $C^1([a, b])$ i

$$F'(t) = \int_M \partial_t f(t, x)\, dx.$$

**4.** Niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pokaż, że wtedy funkcja

$$f \star \varphi(x) = \int f(x - y)\varphi(y)\, dy = \int f(y)\varphi(x - y)\, dy$$

jest klasy $C^\infty(\Omega)$.

**5.** Niech $\varphi \in C_c(\boldsymbol{R}^N)$ i niech $\int \varphi(x)\, dx = 1$. Dla $n \in \boldsymbol{N}$ definiujemy $\varphi_n(x) = n^N \varphi(nx)$. Pokaż, że

a) $\varphi_n \star f \to f$ w normie $L^1(\boldsymbol{R}^N)$, gdy $f \in L^1(\boldsymbol{R}^N)$,

b) $\varphi_n \star f(x) \to f(x)$ dla każdego punktu ciągłości $x$ funkcji $f$, gdy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$,

c) $\int_K |\varphi_n \star f - f| \to 0$ na każdym zwartym podzbiorze $K \subset \boldsymbol{R}^N$, gdy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$.

**6.** Udowodnij, że każdy zbiór otwarty $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ można przedstawić jako sumę ciągu zbiorów $U_j$ otwartych, warunkowo zwartych i takich że $\overline{U}_j \subset U_{j+1}$.

**7.** Dany jest otwarty zbiór $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ i jego pokrycie $\{U_j\}$ zbiorami otwartymi. Dla każdego $j$, niech $U_j = \bigcup_k U_{j,k}$, gdzie $U_{j,k}$ są otwarte, warunkowo zwarte i $\overline{U}_{j,k} \subset \operatorname{int} U_{j,k+1}$. Połóżmy

$$V_j = U_j \setminus \bigcup_{k<j} \overline{U}_{k,j}.$$

Pokaż, ze $\{V_j\}$ jest lokalnie skończonym pokryciem otwartym $\Omega$ wpisanym w pokrycie $\{U_j\}$.

**(pg)**