Zadania z teorii dystrybucji #3 **23/10/2017**

1. Funkcję lokalnie całkowalną $Y = \chi_{\boldsymbol{R}^+}$ nazywamy funkcją Heaviside'a. Oblicz $Y \star \varphi'$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$.

2. Pokaż, że funkcja $f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ ma pierwotną $g \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\,dx = 0$.

3. Wykaż, że w topologicznej przestrzeni wektorowej, której topologię definiuje rodzina półnorm $\mathcal{P}$, zbiór E jest ograniczony, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sup\{p(x) : x \in E\} < \infty$$

dla każdego $p \in \mathcal{P}$.

4. Niech $K \subset \boldsymbol{R}^N$ będzie zwarty. Pokaż, że przestrzeń $\mathcal{D}(K)$ z półnormami

$$\|f\|_{(m)} = \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

jest metryzowalna i zupełna. Pokaż też, że zbiory ograniczone w $\mathcal{D}(K)$ są warunkowo zwarte. Wywnioskuj stąd, że topologia przestrzeni $\mathcal{D}(K)$ nie pochodzi od normy.

5. Pokaż, że

$$\lambda(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(0,\infty),$$

jest dystrybucją na $(0,\infty)$, która nie ma przedłużenia do dystrybucji na $\boldsymbol{R}$.

6. Dla jakich ciągów $c_k \in \boldsymbol{C}$ oraz $x_n \in \boldsymbol{R}^N$ wzór

$$\lambda(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f^{(k)}(x_k)$$

definiuje dystrybucję na $\boldsymbol{R}^N$?

7. Niech λ będzie dystrybucją na Ω, taką że $\lambda(f) \ge 0$ dla $f \ge 0$. Udowodnij, że

$$\lambda(f) = \int f\,d\mu$$

dla pewnej miary Radona μ na Ω.

8. Niech H oznacza dystrybucję Hilberta. Wykaż, że

$$a) \qquad H(\varphi) = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(-R,R),$$

$$b) \qquad \lim_{\eta \to 0+} \int_{\boldsymbol{R}} \frac{\varphi(x)\,dx}{x + i\eta} = H(\varphi) - i\pi\delta_0(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}).$$

9. Sprawdź, że dla każdego $1 \le j \le n$ transformata Riesza

$$R_j(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \ge \varepsilon} \frac{x_j f(x)\,dx}{\|x\|^{N+1}}$$

jest dystrybucją na $\boldsymbol{R}^N$. **(pg)**