Zadania z teorii dystrybucji #4 **26/10/2017**

1. Oblicz pochodną dystrybucyjną dystrybucji Hilberta.

2. Niech $\lambda > -1$. Oblicz pochodną dystrybucyjną funkcji $f(x) = x^\lambda$ dla $x > 0$ i poza tym znikającej.

3. Oblicz pochodną dystrybucyjną funkcji lokalnie całkowalnej $f(x) = \log |x|$ na prostej.

4. Oblicz pochodną dystrybucyjną $\partial_j \log \|x\|$ na $\boldsymbol{R}^N$.

5. Niech $m > 0$. Dana jest funkcja ciągła $x \to \|x\|^{-N-m}$ na $\Omega = \boldsymbol{R}^N \setminus \{0\}$. Przedłuż tę funkcję do dystrybucji u na $\boldsymbol{R}^N$ i oblicz pochodne cząstkowe $\partial_j u$.

6. Czy znikanie funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ na nośniku dystrybucji λ pociąga $\lambda(\varphi) = 0$?

7. Dana jest dystrybucja $\lambda \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ i funkcja $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, taka że $D^\alpha \varphi(x) = 0$ dla $x \in \operatorname{supp} \lambda$ i $\alpha \in \boldsymbol{N}^N$. Pokaż, że $\lambda(\varphi) = 0$.

8. Niech μ będzie dystrybucją o nośniku w kuli $B = \{x \in \boldsymbol{R}^N : \|x\| \leq 1\}$. Pokaż, że jeśli $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ znika na B, to $\mu(\varphi) = 0$.

9. Dane są $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ i $\mu \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N)$. Czy warunki $\mu(\varphi) = 0$ i $\varphi\mu = 0$ są równoważne?

10. Niech $c_n > c_{n+1}$ i $\sum_n c_n < \infty$. Niech

$$\lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(c_n) - \varphi(0)), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}). \tag{a}$$

Sprawdź, że λ jest dystrybucją rzędu dokładnie 1.

11. Dany jest ciąg funkcji $\varphi_n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, taki że

$$\lim_{n\to\infty} \|D^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty(K)} = 0 \tag{b}$$

dla każdego α, gdzie K jest zwartym nośnikiem dystrybucji λ. Wykazać, że $\lambda(\varphi_n)$ nie musi zbiegać do zera. *W tym celu rozważyć następujący przykład: Niech λ będzie dystrybucją zdefiniowaną wzorem* (a). *Niech funkcja $\varphi_n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$ znika dla $x \leq c_{n+1}$ i $\varphi_n(x) = 1/n$ dla $c_n \leq x \leq c_1$.*

12. W warunku (b) zastępujemy nośnik K pewnym zbiorem otwartym V zawierającym K. Udowodnij, że wtedy $\lim_n \lambda(\varphi_n) = 0$.

13. Zbadaj, czy funkcjonał

$$u(\varphi) = \int_{\boldsymbol{R}} \frac{(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx}{|x|^{3/2}},$$

jest dystrybucją. Jeśli tak, znajdź jej rząd. **(pg)**