Zadania z teorii dystrybucji #5 **13/11/2017**

1. W jakim sensie można mówić o splocie dystrybucji $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, gdy Ω jest otwartym podzbiorem $\boldsymbol{R}^N$ różnym od całej przestrzeni?
2. Niech $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N)$, $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ i niech przynajmniej jedna z nich ma nośnik zwarty. Wyprowadź wzór $\langle u \star \varphi, \psi\rangle = \langle u, \psi \star \widetilde{\varphi}\rangle$ dla $\psi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$.
3. Dana jest dystrybucja $u \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^N)$. Pokaż, że warunki a) $u(\varphi_x) = u(\varphi)$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, $x \in \boldsymbol{R}^N$, oraz b) $D_j u = 0$ dla $1 \le j \le N$ są równoważne i pociągają, że u jest funkcją stałą.
4. Pokaż, że jeśli $D_j u$ jest funkcją ciągłą na Ω dla $1 \le j \le N$, to dystrybucja u jest funkcją klasy $C^1(\Omega)$.
5. Dany jest ciąg liczb dodatnich c_n zbieżny do 0. Udowodnij, że miara $\mu = \sum_n \delta_{c_n}$ na $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ ma przedłużenia do dystrybucji na $\boldsymbol{R}$, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $m \in \boldsymbol{N}$, takie że $\sum_n c_n^m < \infty$.
6. Dana jest funkcja ciągła N na odcinku $(0,1]$, taka że $\lim_{x\to 0+} N(x) = \infty$. Udowodnij, że miara $\langle \mu, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x)N(x)\,dx$ na odcinku $(0,1]$ ma przedłużenia do dystrybucji na $(-1,1)$, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $m \in \boldsymbol{N}$, takie że $\int_0^1 x^m N(x)\,dx < \infty$.
7. Niech $u_t = t^{1/k} e^{itx^k}$ dla $t > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, $k = 1,2$. Znajdź granicę dystrybucyjną $\lim_{t\to\infty} u_t$.
8. Niech $F = |Q|^{-1}\chi_Q$, gdzie Q jest kostką jednostkową $[-1,1]^N$ w $\boldsymbol{R}^N$. Udowodnij, że splot $F \star F \star F$ jest funkcją klasy C^1.
9. Niech $F = |B|^{-1}\chi_B$, gdzie B jest kulą jednostkową w $\boldsymbol{R}^N$. Udowodnij, że splot $F \star F \star \cdots \star F$ ($N+2$ razy) jest funkcją klasy C^1.
10. Niech f będzie funkcją harmoniczną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$. Pokaż, że dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi \in C_c^1(B_\varepsilon)$, gdzie $B_\varepsilon = \{x \in \boldsymbol{R}^N : \|x\| < \varepsilon\}$, taka że $f(a) = f \star \varphi(a)$ dla $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega) > \varepsilon$.
11. Wykaż, że każda funkcja harmoniczna jest klasy $C^\infty(\Omega)$.
12. Ciąg funkcji harmonicznych f_n na zbiorze otwartym Ω jest zbieżny w sensie dystrybucyjnym do dystrybucji f. Pokaż, że f_n jest ciągiem Cauchy'ego w $C^\infty(\Omega)$, a wobec tego f jest funkcją harmoniczną.
13. Niech u będzie dystrybucją na $\boldsymbol{R}^N$, taką, że $\Delta u = 0$ na zbiorze otwartym Ω. Pokaż, że u jest funkcją harmoniczną na Ω.

(pg)