Zadania z teorii dystrybucji #6 **20/11/2017**

1. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ ciągłych i nieujemnych funkcjonałów spełniających warunki a) $f(x+y) \le f(x) + f(y)$, b) $f(\lambda x) \le |\lambda| f(x)$ na przestrzeni Frécheta X. Udowodnij, że jeśli

$$\sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} < \infty$$

dla każdego $x \in X$ z osobna, to rodzina $\mathcal{F}$ jest jednakowo ciągła.

2. Pokaż, że jeśli dystrybucje S, T są splatalne, to

$$D^\alpha(S \star T) = (-1)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)} \star (S \star T) = (D^\alpha S \star T).$$

3. Dane są miary Radona μ i ν na $\boldsymbol{R}^N$, takie że

$$\iint |\varphi(x+y)||\mu|(dx)|\nu|(dy) < \infty$$

dla każdej funkcji $\varphi \in C_c(\boldsymbol{R}^N)$. Pokaż, że μ, ν są splatalne jako dystrybucje, ich splot jest miarą Radona $\mu \star \nu$, oraz

$$\mu \star \nu(K) = \int \mu(K_{-x})\nu(dx)$$

dla każdego zbioru zwartego $K \subset \boldsymbol{R}^N$.

4. Funkcję lokalnie całkowalną F zadaną na $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\}$ wzorem

$$F(x,y) = \frac{y}{x(x^2+y^2)}$$

przedłuż do dystrybucji K na $\boldsymbol{R}^2$. Następnie sprawdź, że dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R})$, takiej że $\int_{\boldsymbol{R}} \frac{\varphi(y)}{1+y^2}\, dy = 1$, funkcjonał

$$\langle K^\varphi, f\rangle = \langle K, f \otimes \varphi\rangle, \qquad f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}),$$

jest dystrybucją Hilberta.

5. Niech L będzie ciągłym odwzorowaniem przestrzeni $\mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$ w przestrzeń funkcji ciągłych z topologią zbieżności punktowej i takim, że $D^\alpha L(f) = L(D^\alpha f)$ dla każdego α i każdego $f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$. Wykaż, że istnieje dystrybucja λ, taka, że $Lf = \lambda \star f$. *Wskazówka. Rozważ funkcję* $F(x,y) = \Big(L(f_{-x}\Big)_x(y)$.

6. Korzystając z przedstawienia delty Diraca $\delta_0 = \sum_\alpha D^\alpha u_\alpha$, udowodnij nierówność

$$\|f\|_{L^\infty} \lesssim \sum_\alpha \|D^\alpha f\|_{L^1}$$

dla $f \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$. Posłuż się wyprowadzoną nierównością i pokaż, że dystrybucja λ, taka że $D^\alpha\lambda \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^N)$ dla każdego α jest funkcją klasy $C^\infty(\boldsymbol{R}^N)$.

7. Dystrybucja Hilberta jest splatalna z każdą funkcją $f \in L^p(\boldsymbol{R})$, gdzie $1 \le p < \infty$.

8. Sprawdź, że funkcja $f(x) = e^x \cos e^x$ jest dystrybucją temperowaną.

(pg)