Zadania z teorii dystrybucji #7 **6/12/2017**

1. Skonstruuj ciąg zbieżny w $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$, ale nie w $\mathcal{D}(\boldsymbol{R})$.

2. Skonstruuj ciąg wielomianów zbieżny w $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R})$, ale nie w $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R})$.

3. Niech $1 \leq p < \infty$. Niech $T : L^p(\boldsymbol{R}^N) \to L^p(\boldsymbol{R}^N)$ będzie ciągłym operatorem liniowym komutującym z przesunięciami. Pokaż, że wtedy T przekształca $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^N)$ w $C_0(\boldsymbol{R}^N)$ w sposób ciągły względem topologii tych przestrzeni. Wywnioskuj, że istnieje dystrybucja $\lambda \in \mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$, taka że $Tf = \lambda \star f$ dla $f \in L^p(\boldsymbol{R}^N)$. Wyjaśnij, dlaczego λ i f są splatalne. Zacznij od rozważenia przypadku $p = 2$.

4. Pokaż, że w przestrzeni $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^N)$ istnieje metryka niezmiennicza d, taka że transformata Fouriera $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest izometrią.

5. Udowodnij, że ciąg $\star$-słabo ograniczony w $\mathcal{S}'$ jest ograniczony w $\mathcal{S}'_m$ dla pewnego m.

6. Znajdź spektrum transformaty Fouriera jako unitarnego przekształcenia $L^2(\boldsymbol{R}^N)$.

7. Udowodnij, że jeśli K jest zwartym podzbiorem przestrzeni Frécheta X, to domknięcie wypukłej otoczki zbioru K też jest zwarte.

8. Niech X będzie przestrzenią Frécheta, a Q zwartą przestrzenią topologiczną z miarą Radona $\mu \geq 0$. Jeśli $F : Q \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje dokładnie jeden wektor $x \in X$, taki że

$$\langle \lambda, x \rangle = \int_Q \langle \lambda, F(t) \rangle \mu(dt), \qquad \lambda \in X'.$$

Piszemy: $x = \int_Q F d\mu$. (Rudin, Twierdzenie 3.27).

9. Wyjaśnij, w jaki sposób splot $f \star \varphi$, gdzie $f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^N)$, można interpretować jako całkę z funkcji wektorowej.

10. Niech f będzie funkcją holomorficzną na $\boldsymbol{C}^N = \boldsymbol{R}^N + i\boldsymbol{R}^N$ zmiennej $z = x + iy$. Pokaż, że jeśli $f(z) = f(x + iy) = 0$ dla $y = 0$, to $f = 0$.

11. Dana jest funkcja całkowita F na $\boldsymbol{C}^N$, taka że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\gamma > 0$ i $M > 0$, takie że

$$|F(z)| \leq \gamma(1 + |z|)^M e^{\varepsilon |\operatorname{Im} z|}, \qquad z \in \boldsymbol{C}^N.$$

Pokaż, że F jest wielomianem.

12. Pokaż, że dystrybucja harmoniczna λ jest w istocie wielomianem.

(pg)