Funkcje analityczne #1

---

1. Pokaż, że jeśli $a \in \mathbf{C}$ i $|a| < 1$, to $a^n \to 0$.

2. Pokaż, że jeśli $a \in \mathbf{C}$ i $|a| > 1$, to $a^n \to \infty$.

3. Niech $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, gdzie $\varphi/\pi \in \mathbf{Q}$. Pokaż, że ciąg (a^n) jest rozbieżny i ma skończenie wiele punktów skupienia.

4. Niech $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, gdzie $\varphi/\pi \notin \mathbf{Q}$. Pokaż, że ciąg (a^n) jest rozbieżny i każdy punkt $|z| = 1$ jest jego punktem skupienia.

5. Dla jakich $a \in \mathbf{C}$ ciągi o wyrazach

$$na^n, \quad \frac{a^n}{1+a^n}, \quad a^n/n, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k^2}$$

są zbieżne?

6. Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów

$$\frac{a^n}{1+a^{2n}}\ (|a|<1), \quad \frac{a^n}{1+a^{2n}}\ (|a|>1), \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a^k\ (|a|=1, a \neq 1).$$

7. Pokaż, że dla $|a| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k^4} = \infty.$$

8. Dla danego $\varphi \in \mathbf{R}$ sprawdź, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

W tym celu znajdź najpierw moduł i argument podanego ciągu.

9. Znajdź wszystkie wartości rzeczywistego parametru α, dla których szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(\cos n + i\sin n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(\cos\pi/n + i\sin\pi/n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \log^{\alpha}(n^2+1)}{n}$$

są zbieżne.

10. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych i zbadaj ich zbieżność na brzegu koła zbieżności:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^5 z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^5 z^{4n}.$$

11. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

12. Dany jest szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ o promieniu zbieżności R. Oblicz promienie zbieżności szeregow potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^M z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{Mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1+|c_n|}.$$
