Funkcje analityczne #2

---

1. Dany jest nieograniczony ciąg $c_n \in \mathbf{C}$. Znajdź promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1+|c_n|}$.

2. Sprawdź, że $e^{u+v} = e^u e^v$ dla $u, v \in \mathbf{C}$.

3. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

4. Sprawdź, że $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 = \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z$.

5. Sprawdź, że

$$\sin 3z = 3\cos^2 z \sin z - \sin^3 z, \qquad \cos 3z = -3\cos z + \cos^3 z.$$

W tym celu zauważ, że $\cos 3z + i \sin 3z = (\cos z + i \sin z)^3$ i porównaj częsci rzeczywiste oraz urojone obu stron.

6. Znajdź analogiczne wzory dla $\operatorname{sh} 3z$ i $\operatorname{ch} 3z$.

7. Wykaż, że suma szeregu potęgowego $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ o promieniu zbieżności $r > 0$ jest funkcją analityczną w $K(0, r)$.

8. Oblicz $\log_0(-1)$ i $\log_{-\pi} i$.

9. Dane są dwie liczby rzeczywiste $\alpha \neq \beta$ i funkcje $f(z) = \arg_\alpha(z)$ oraz $g(z) = \arg_\beta(z)$. Pokaż, że różnica $f(z) - g(z)$ jest wielokrotnością $2\pi i$ dla każdego $z \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, ale $f - g$ nie jest funkcją stałą. Ile wartości przyjmuje funkcja $f - g$?

10. Niech $f(z) = z \to z + 1/z$ (funkcja Żukowskiego). Pokaż, że

$$f : \mathbf{C} \setminus \bar{K}(0, 1) \to \mathbf{C} \setminus [-1, 1]$$

jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym. W tym celu zapisz $f = u + iv$ i zauważ, że

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \qquad v(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$
