Funkcje analityczne #3

---

1. Niech $|z| > 1$. Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \infty.$$

2. W których punktach funkcje
$$\operatorname{Re} z, \quad z \operatorname{Re} z, \quad x^2y^2, \quad |z|^2, \quad x^2 + iy^2, \quad 2xy - i(x^2 - y^2)$$
są holomorficzne?

3. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbf{Z}$ funkcja $f(z) = z^n$ jest holomorficzna na swojej dziedzinie i znajdź jej pochodną. Czy funkcje te mają pierwotne? Jeśli tak, to znajdź je.

4. Znajdź pochodne funkcji $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $e^{\operatorname{sh} z}$.

5. Rozwiń funkcję Żukowskiego w szereg potęgowy wokół $a = i$. Znajdź miejsca zerowe funkcji Żukowskiego, jej pochodnej i jej drugiej pochodnej.

6. W obszarze Ω_α definiujemy dla ustalonego $a \in \mathbf{C}$ potęgę:
$$z^a = e^{a \log_\alpha z}.$$
Pokaż, że funkcja $f(z) = z^a$ jest holomorficzna i oblicz jej pochodną. Sprawdź, że
$$\frac{e^{a \log_\alpha z}}{e^{a \log_\beta z}} = e^{2ka\pi i}.$$
Czy $k \in \mathbf{Z}$ zależy od z?

7. Niech będzie dana funkcja $f = u + iv : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$. Niech $g(r, \varphi) = f(re^{i\varphi}) = U(r, \varphi) + iV(r, \varphi)$. Pokaż, że f jest holomorficzna iff
$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

8. Sprawdź, że funkcja $f_\alpha(re^{i\varphi}) = \ln r + i \arg_\alpha \varphi$ jest holomorficzna na Ω_α.

9. Niech f będzie holomorficzna w obszarze Ω. Pokaż, że jeśli $\operatorname{Re} f(z)$ jest funkcją stałą w Ω, to f jest funkcją stałą w Ω.

10. Niech f będzie holomorficzna w obszarze Ω. Pokaż, że jeśli $|f(z)|$ jest funkcją stałą w Ω, to f jest funkcją stałą w Ω.

11. Wszystkie wartości funkcji holomorficznej f na obszarze Ω leżą na ustalonej prostej. Udowodnij, że f jest stała.

12. Niech $f = u + iv$ będzie holomorficzna w obszarze Ω i niech $u(z) = F(v(z))$, gdzie $F \in C^1(\mathbf{R})$. Pokaż, że f jest stała. W tym celu zróżniczkuj równość $u(x, y) = F(v(x, y))$, zastosuj równania Cauchy'ego-Riemanna i wyciągnij wnioski.
