Funkcje analityczne #4

1. Oblicz $\cos i$, $\sin i$, $e^{i\pi}$.

2. Oblicz części rzeczywiste,i urojone i moduły liczb $\cos z$, $\sin z$, e^z dla $z \in \mathbf{C}$.

3. Pokaż, że $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ i $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 + |\operatorname{sh} z|^2$.

4. Pokaż, że funkcja Żukowskiego nie ma pierwotnej w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, ale ma ją w każdym ze zbiorów Ω_α. Oblicz

$$\int_{|z+2|=1} (z + \frac{1}{z})\, dz, \qquad \int_{|z-1-i|=1} (z + \frac{1}{z})\, dz, \qquad \int_{[1,i]} (z + \frac{1}{z})\, dz.$$

5. Oblicz całki

$$\int_{|z|=1} |z-1||dz|, \quad \int_{[0,i]} z \sin z\, dz, \quad \int_{[1,i,-1,-i,1]} \frac{dz}{z}, \quad \int_{|z|=r} z^n\, dz.$$

6. Pokaż, że

$$\int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi r}{||a|^2 - r^2|}, \qquad |a| \neq r.$$

7. Dana jest funkcja ciągła w obszarze wypukłym $U \subset \mathbf{C}$, taka że $\operatorname{Re} f(z) \geqslant M$ dla $z \in U$. Pokaż, że dla dowolnych $a, b \in U$ jest

$$\left| \int_{[a,b]} f(z)\, dz \right| \geqslant M|b-a|.$$

8. Niech

$$F(z) = \begin{cases} \log\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{y}, & y > 0, \\ \log\sqrt{x^2+y^2}, & y = 0,\ x > 0, \\ \log\sqrt{x^2+y^2} - i \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{-y}, & y < 0, \end{cases}$$

gdzie $z = x + iy$. Sprawdź, że $F = \log_{-\pi} : \Omega_{-\pi} \to P_{-\pi}$. Pamiętaj, że arc ctg jest funkcją odwrotną do $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbf{R}$.

9. Sprawdź bezpośrednim rachunkiem, że funkcja z poprzedniego zadania spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna.

10. Znajdź wszystkie punkty na brzegu koła zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^{5n}}{n}$, w których szereg ten jest zbieżny. *Wskazówka*: Rozważ najpierw szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n}$.

11. Udowodnij, że jeśli suma szeregu potęgowego $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ o promieniu zbieżności $r > 0$ jest rzeczywista dla $z \in (0, r/2)$, to $a_n \in \mathbf{R}$ dla każdego n.

12. Wyznacz całkę $\int_\gamma |z|\, dz$, jeśli a) $\gamma = [-i, i]$, b) γ jest lewym (prawym) półokręgiem okręgu $C(0,1)$ łączącym $-i$ z i.

13. Wykaż, że funkcja $f(z) = \sin(1/z)$ jest analityczna w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ i zauważ, że istnieje ciąg miejsc zerowych tej funkcji $z_n \to 0$, a funkcja nie jest zerowa. Czy nie przeczy to twierdzeniu o zerach funkcji analitycznej?

14. Oblicz całki

$$\int_{x^2+4y^2=1} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{|z-2-i|=\sqrt{2}} \frac{e^z \cos z\, dz}{(1+z^2)\sin z}.$$

15. Funkcja f jest holomorficzna w obszarze U zawierającym $\overline{K}(0,r)$. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt = 2\pi f(0).$$

(pg)