Funkcje analityczne #5

---

1. Wykaż, że funkcja $f(z) = \sin(1/z)$ jest analityczna w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. (Skorzystaj z faktu, że funkcja holomorficzna w obszarze jest analityczna w tymże obszarze). Zauważ, że istnieje ciąg miejsc zerowych tej funkcji $z_n \to 0$, a funkcja nie jest zerowa. Dlaczego nie przeczy to twierdzeniu o zerach funkcji analitycznej?

2. Funkcja f jest holomorficzna w obszarze U zawierającym $\overline{K}(0, r)$. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt = 2\pi f(0).$$

3. Pokaż, korzystając z lematu Goursata, że całka z funkcji holomorficznej f w kole $|z| = 2$ po brzegu kwadratu $|x| + |y| = 1$ znika.

4. Oblicz całki

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}, \quad \int_{|z-1/2|=1} \frac{dz}{1+z^2}, \quad \int_{|z+1/2|=1} \frac{dz}{1+z^2}.$$

5. Oblicz całki

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z\, dz}{1+z^2}, \quad \int_{|z-1/2|=1} \frac{dz}{e^z(1+z^2)}, \quad \int_{|z+1/2|=1} \frac{dz}{z(1+z^2)}.$$

6. Oblicz całki

$$\int_{x^2+4y^2=1} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{|z-2-i|=\sqrt{2}} \frac{e^z \cos z\, dz}{(1+z^2)\sin z}.$$

7. Funkcja f jest holomorficzna w $K(0, 1) \setminus \{0\}$. Pokaż, że wartość całki

$$I(r) = \int_{|z|=r} f(z)\, dz$$

nie zależy od $0 < r < 1$.

8. Dana jest liczba $r > 1$. Wyznacz całkę

$$\int_{|z-r|=r} \frac{z\, dz}{z^4 - 1}.$$

9. Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi} \ln|re^{it} - a|\, dt = 2\pi \ln|a|,$$

jeśli $0 \leqslant r < |a|$. W tym celu przypomnij sobie, że $\ln|z| = \Re \log_\alpha z$ dla odpowiedniego α.

10. Zastosuj twierdzenie Greena do funkcji $f(z) = z^2$ na dowolnym ograniczonym obszarze Ω, którego brzeg ma parametryzację γ będącą drogą.
