Funkcje analityczne #6

---

1. Niech f będzie funkcja całkowitą, tzn. holomorficzną na $\mathbf{C}$. Udowodnij, że jeśli $|f(z)| \leqslant M(1+|z|)^p$, gdzie $p>0$, to f jest wielomianem stopnia nie większego niż p. W tym celu naśladuj dowód twierdzenia Liouville'a.

2. Korzystając z twierdzenia Liouville'a, pokaż, że funkcja całkowita, która ma w nieskończoności granicę c jest funkcją stałą równą wszędzie tej granicy.

3. Dana jest funkcja analityczna g w kole jednostkowym $|z|<1$, taka że $g(z)=g(z^2)$. Pokaż, że g jest stała.

4. Dana jest funkcja analityczna f w kole jednostkowym $|z|<1$, taka że $f(0)=0$ i $f(z)=z+f(z^2)$. Pokaż, że

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}, \qquad |z|<1.$$

Skorzystaj z poprzedniego zadania dla funkcji $g(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$.

5. Dana jest funkcja holomorficzna w obszarze ograniczonym Ω i ciągła na $\bar{\Omega}$. Zakładamy też, że $f(z)\neq 0$ dla $z\in\Omega$. Udowodnij, że jeśli $g(z)=|f(z)|$ przyjmuje wartość najmniejszą w Ω, to f jest stała.

6. Sformułuj i udowodnij zasadę maksimum dla części rzeczywistej funkcji holomorficznej w obszarze ograniczonym i ciągłej na domknięciu tego obszaru.

7. Udowodnij, że jeśli w lemacie Schwartza $|f(z)|=|z|$ dla pewnego $0<|z|<1$, to istnieje stała $|c|=1$, taka że $f(z)=cz$.

8. Dana jest funkcja ciągła φ na płaszczyźnie. Definiujemy nową funkcję

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{\varphi(u)\,du}{u-z}, \qquad |z|<1.$$

Pokaż, że funkcja f rozwija się w szereg potęgowy. Wywnioskuj, że

$$\int_{|u|=1}\frac{\varphi(u)\,du}{u-z}=\int_{|u|=r}\frac{f(u)\,du}{u-z}$$

dla $|z|<r<1$.

9. Dla wielomianu P stopnia n niech $M(r)=\max_{|z|=r}|P(z)|$. Pokaż, że funkcja $\varphi(r)=M(r)/r^n$ jest malejąca dla $r>0$, a jeśli $\varphi(r_1)=\varphi(r_2)$ dla pewnych $0<r_1<r_2$, to $P(z)=cz^n$. W tym celu zastosuj zasadę maksimum do wielomianu $w^nP(1/w)$.

10. Niech $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ będzie obszarem. Funkcja $u:\Omega\to\mathbf{R}$ nazywa sie harmoniczna, jeśli

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega.$$

Pokaż, że funkcje

$$u(x,y)=\ln(x^2+y^2), \qquad v(x,y)=x(x^2+y^2)^{-1}, \qquad w(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

są harmoniczne w $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\neq 0\}$.

11. Pokaż, że część rzeczywista i część urojona funkcji holomorficznej w obszarze są funkcjami harmonicznymi.
