Funkcje analityczne #7

---

1. Pokaż, że funkcja całkowita f mająca granicę ∞ w nieskończoności musi mieć miejsce zerowe. Wyprowadź stąd podstawowe twierdzenie algebry.

2. Niech f będzie funkcją całkowitą spełniającą $|f(z)| \geqslant 1|$ dla $z \in \mathbf{C}$. Pokaż, że f jest stała.

3. Dana jest funkcja całkowita $f = u + iv$, taka że $v \geqslant 0$. Pokaż, że f jest stała. W tym celu rozważ $g(z) = \exp\{if(z)\}$.

4. Znajdź maksymalną wartość funkcji $u(z) = \operatorname{Re} z^3$ na kwadracie $[0,1]^2$.

5. Sklasyfikuj osobliwości funkcji

$$\frac{z}{\sin z}, \qquad \exp\{1/z\}, \qquad z\cos(1/z), \qquad \frac{1}{z(e^z-1)}, \qquad \operatorname{ctg} z.$$

6. Mówimy, że funkcja holomorficzna f określona dla $|z| > R$ ma w nieskończoności osobliwość pozorną, istotną lub biegun w zależności od tego, jakiego rodzaju jest osobliwośc funkcji $g(z) = f(1/z)$ w zerze. Sklasyfikuj osobliwości w ∞ funkcji z poprzedniego zadania.

7. Sklasyfikuj osobliwości podanych funkcji w $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$:

$$\frac{\sin^2 z}{z^2}, \qquad \frac{1}{z^2(z+1} + \sin 1/z, \qquad \exp\{\operatorname{tg} 1/z\}, \qquad \frac{1}{\sin(\sin z)}.$$

8. Funkcję $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ rozwiń w szereg Laurenta wokół $z = i$.

9. Jakiego rodzaju osobliwość ma $1/\log_{-\pi} z$ w punkcie $z = 1$?

10. Dana jest niestała funkcja całkowita. udowodnij, że dla każdego $R > 0$ zbiór $f(\{z : |z| > R\})$ jest gęsty w płaszczyźnie. Skorzystaj z twierdzenia Casoratiego-Weierstrassa.

11. Dana jest funkcja holomorficzna w $K'(a,r)$ mająca w a biegun krotności m i wielomian stopnia n. Pokaż, że funkcja $g = P \circ f$ ma w a biegun krotności mn.

12. (*) Dany jest ciąg funkcji holomorficznych zbieżny niemal jednostajnie w obszarze Ω. Udowodnij, że granica jest funkcją holomorficzną i że ciąg pochodnych jest zbieżny niemal jednostajnie do pochodnej granicy. W tym celu skorzystaj ze wzorów całkowych Cauchy'ego.

13. (*) Pokaż, że

$$\log_{-\pi} z = \int_0^\infty \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t+z} \right) dt.$$
