

## Funkcje analityczne #8

---

1. Oblicz residua

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad \operatorname{Res}_{z=\pi/4} \frac{\cos z}{z-\pi/4}, \quad \operatorname{Res}_{z=1} z e^{(z-1)^{-1}}, \quad \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}.$$

2. Dany jest wielomian  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ . Pokaż, że

$$\operatorname{Res}_{z=0} P(1/z) = a_1, \quad \operatorname{Res}_{z=0} z^2 P(1/z) = a_3.$$

3. Opisz punkty osobliwe i znajdź odpowiednie residua funkcji

$$\frac{1}{z+z^3}, \quad \frac{z^2}{1+z^4}, \quad \frac{z^3}{(1+z)^3}, \quad \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}.$$

4. Opisz punkty osobliwe i znajdź odpowiednie residua funkcji

$$\frac{1}{\sin \pi z}, \quad \operatorname{ctg} \pi z, \quad \operatorname{tgh} z, \quad \operatorname{ctgh}^2 z, \quad \frac{\cos z}{(z-1)^2}, \quad \frac{1}{e^z + 1}.$$

5. Stosując metodę residuów, oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

6. Stosując metodę residuów, oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 - 2ix - 2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + i}.$$

7. (\*) Oblicz całkę  $\int_0^{\infty} \sin x dx/x$ .

8. (\*) Dany jest wielomian  $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ , gdzie nie wszystkie współczynniki  $a_k$  są zerami. Pokaż, że istnieje punkt  $|z_0| = 1$ , taki że  $|P(z_0)| > 1$ .

9. Opisz osobliwości funkcji Żukowskiego.