

## Funkcje analityczne #9

---

1. Wskaż holomorfczne odwzorowanie dysku jednostkowego  $D = K(0, 1)$  na  $D$ , które odwzorowuje a) 0 na zadany punkt  $a$ , b) zadany punkt  $a$  na zadany punkt  $b$ .
2. Oblicz pochodną odwzorowania  $\varphi_a$ , gdzie  $a \in D$ . Oblicz wartości  $\varphi'_a(0)$  i  $\varphi'_a(a)$ .
3. Pokaż, że  $\varphi_a$  można rozszerzyć do homeomorfizmu  $\hat{C}$ .
4. Wykaż, że wzajemnie jednoznaczne holomorfczne odwzorowanie dysku jednostkowego przedłuża się do takiegoż odwzorowania koła  $K(0, r)$  dla pewnego  $r > 0$ , w szczególności do homeomorfizmu  $\bar{D}$ .
5. Oblicz część urojoną jądra Cauchy'ego.
6. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_z(t) dt = 1,$$

gdzie  $Q_z$  jest jądrem Cauchy'ego.

7. Dany jest jednostajnie zbieżny ciąg funkcji  $u_n$  ciągłych na  $\bar{D}$  i harmonicznych w  $D$ . Korzystając z reprezentacji za pomocą jądra Poissona, pokaż, że granica też jest funkcją harmoniczną w  $D$ .
8. Niech  $u \in C(\bar{D})$  będzie harmoniczną w  $D$ . Udowodnij nierówność

$$|u(re^{it})| \leq \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(e^{is})| ds. \quad 0 < r < 1, t \in \mathbf{R}.$$

Skorzystaj z reprezentacji Poissona.

**Uwaga:** Studenci, którzy chcieliby poprawić swoją ocenę z ćwiczeń, mogą pisać dodatkowo sprawdzian. Proszę skontaktować się ze mną, najlepiej na poniedziałkowych konsultacjach. (pg)