Funkcja holomorficzna na obszarze jest odwzorowaniem otwartym, chyba że jest stała.

Z analizy rzeczywistej wiemy, że odwzorowanie płaszczyzny klasy C^1 przekształca zbiory otwarte w zbiory otwarte, pod warunkiem, że jego pochodna jest wszędzie nieosobliwa. Holomorficzność, czyli różniczkowalność zespolona, daje mocniejszy wynik.

Lemat 1. *Niech f będzie holomorficzna w zbiorze otwartym Ω. Niech $a \in \Omega$ i $f'(a) \neq 0$. Istnieje otoczenie V punktu a, takie że*

$$|f(u) - f(v)| \geqslant \frac{A}{4} \cdot |u - v|, \qquad A = |f'(a)|.$$

Dowód. Niech V będzie otoczeniem punktu a, takim że

$$|f(u) - f(v) - f'(v)(u - v)| \leqslant \frac{A}{4} \cdot |u - v|, \qquad u, v \in V$$

oraz

$$|f'(v)| \geqslant \frac{A}{2}, \qquad v \in V.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &\geqslant |f'(v)||u - v| - \frac{A}{4} \cdot |u - v| \\ &\geqslant \frac{A}{4} \cdot |u - v|, \qquad u, v \in V. \end{aligned}$$

□

Lemat 2. *Niech $\Omega \subset \mathbf{C}$ bedzie otwarty i niech $f : \Omega \to \mathbf{C}$ będzie funkcja holomorficzną. Jeśli $f'(a) \neq 0$, to punkt $b = f(a)$ jest punktem wewnętrznym obrazu $f(\Omega)$.*

Dowód. Dla z z pewnego otoczenia V punktu a mamy.

$$|f(z) - f(a)| \geqslant A|z - a|,$$

gdzie $A > 0$. Niech $\bar{K}(a, r) \subset V$. Niech $\delta = Ar/2$. Pokażemy przez kontrapozycję, że

$$K(b, \delta) \subset f(V).$$

Niech $w \notin f(V)$. Wtedy funkcja $h(z) = f(z) - w$ jest holomorficzna w otoczeniu $\bar{K}(a, r)$ i różna od zera na tym zbiorze. Jej moduł spełnia zasadę minimum. Mamy więc

$$\begin{aligned} |f(a) - w| &\geqslant |f(a + re^{i\theta}) - w| \\ &\geqslant |f(a + re^{i\theta}) - f(a)| - |f(a) - w| \\ &\geqslant 2\delta - |f(a) - w| \end{aligned}$$

dla pewnego $\theta \in \mathbf{R}$, skąd natychmiast

$$|f(a) - w| \geqslant \delta.$$

Zatem $w \notin f(V)$ pociąga $w \notin K(b, \delta)$, o co nam chodziło. □

Wniosek 3. *Przy założeniach Lematu 2 f jest homeomorfizmem pewnego otoczenia $U(a)$ na pewne otoczenie $W(b)$.*

Dowód. Niech $U(a)$ będzie otoczeniem z Lematu 1 i niech $W(b) = f(U(a))$. Na mocy Lematu 2 obraz $W(b)$ jest otwarty, Lemat 1 zaś pokazuje, że f jest rożnowartościowa na $U(a)$ i że f^{-1} jest ciągła na $W(b)$. □

Twierdzenie 4. *Niech $\Omega \subset \mathbf{C}$ bedzie obszarem i niech $f : \Omega \to \mathbf{C}$ będzie niestałą funkcją holomorficzną. Jeśli punkt $a \in \Omega$ jest m-krotnym miejscem zerowym f', gdzie $m \geqslant 0$, to istnieje otoczenie punktu $b = f(a)$ zawarte w obrazie, w którym każda wartość jest $m+1$-krotna.*

Dowód. Zauważmy, że w przypadku $m = 0$ otrzymujemy łączną tezę Lematu 2 i Wniosku 3. Jeśli zaś $m = \infty$, to funkcja f jest stała. Skoro jednak f nie jest stałą, to m jest skończone. Mamy

$$f(z) = f(a) + (z-a)^{m+1}\varphi(z), \qquad |h| < r,$$

gdzie φ jest funkcją holomorficzną i $\varphi(z) = c \neq 0$. Możemy też przyjąć, że $r > 0$ jest tak małe, by $\varphi(z) \in K(c, |c|/2)$ dla $|z-a| < r$.W otoczeniu $|w-c| < |c|/2$ istnieje gałąź logarytmu. Niech

$$g(z) = (z-a)\exp\left\{\frac{\log\varphi(z)}{m+1}\right\}, \qquad |z-a| < r.$$

Wtedy

$$f(z) = f(a) + g(z)^m, \qquad |h| < r_1.$$

Jako że $g'(a) = \exp\{\frac{\log c}{m+1}\} \neq 0$ i $g(a) = c_1$, gdzie $c_1^{m+1} = c$, na mocy Wniosku 3 istnieje $\delta > 0$, takie że każdy punkt z koła $V = K(c_1, \delta)$ jest jednokrotną wartością g w otoczeniu zera $U = g^{-1}(V)$. Stąd każdy punkt koła $K(b, \delta^{m+1})$ jest $m+1$-krotną wartością funkcji f w otoczeniu $a + U$. □

Wniosek 5. *Obraz obszaru i każdego jego podzbioru otwartego przez niestałą funkcję holomorficzną jest otwarty.*

Wniosek 6. *Niech Ω będzie obszarem. Niech $f : \Omega \to \mathbf{C}$ będzie holomorficzna i niestała. Jeśli f jest różnowartościowa, to $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \Omega$.*

Zauważmy, że wynikanie odwrotne nie jest prawdziwe. Funkcja $f(z) = \exp z$ ma wszędzie pochodną różną od zera, ale nie jest różnowartościowa na $\mathbf{C}$, bo jest okresowa:

$$\exp' z = \exp z \neq 0, \qquad \exp(z + 2\pi i) = \exp z, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Wniosek 7. *Jeśli funkcja holomorficzna jest homeomorfizmem zbioru otwartego U na zbiór otwarty V, to funkcja f^{-1} jest też holomorficzna.*

Dowód. Z Wniosku 6 wynika, że $f'(z) \neq 0$ dla $z \in U$. Dalej rozumujemy jak w przypadku rzeczywistym. Niech $w = f(z)$ i $w_0 = f(z_0)$. Z ciągłości f^{-1} wynika, że $w \to w_0$ pociąga $z \to z_0$. Dlatego

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \left\{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right\}^{-1} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

co pokazuje, że

$$\frac{d\,f^{-1}(w_0)}{dw} = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

□