Triangulacje wielokątów

Łukasz Garncarek

Dla dowolnych dwóch punktów $a, b \in \mathbb{R}^2$ przez $[a, b]$ oznaczać będziemy odcinek domknięty o końcach a i b, tzn. zbiór punktów postaci $ta + (1 - t)b$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 1$. Przez (a, b) będziemy oznaczać ten sam odcinek, pozbawiony końców. *Łamaną* o wierzchołkach $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n]$, który oznaczamy w skrócie przez $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Odcinek $[a_{k-1}, a_k]$ nazywamy bokiem łamanej. Jeżeli $a_0 = a_n$, łamaną nazywamy *zamkniętą*. W przypadku łamanych zamkniętych będziemy stosować cykliczną numerację wierzchołków, czyli przyjmiemy, że $a_{k+n} = a_k$ dla dowolnego k całkowitego. Łamaną zamkniętą $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ nazywamy *zwyczajną*, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ punkty a_{i-1}, a_i, a_{i+1} nie leżą na jednej prostej,
- dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ boki $[a_{i-1}, a_i]$ oraz $[a_{j-1}, a_j]$ przecinają sie jedynie wtedy, gdy $j = i + 1$ bądź $i = 1$ i $j = n$, a ich jedynym punktem wspólnym jest wówczas wspólny wierzchołek: odpowiednio a_i lub $a_j = a_0$.

Pierwszym krokiem na drodze do dowodu twierdzenia o triangulacji wielokąta będzie udowodnienie, że wielokąty istnieją. Ci, którzy wierzą w wielokąty, mogą ten fragment pominąć.

Twierdzenie 1 (Jordana-Dehna)**.** *Niech Γ będzie łamaną zamkniętą zwyczajną. Wówczas zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ma dwie składowe spójne.*

Dowód. Niech $\Gamma = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, gdzie $a_i = (x_i, y_i)$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x_i \neq x_j$ dla $0 \leqslant i < j < n$.

Rozważmy prostą pionową ℓ przecinającą Γ w punkcie p. Punkt p jest jednego z trzech typów:

(1) p jest punktem wewnętrznym boku łamanej Γ,

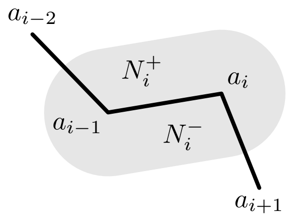
(2) p jest wierzchołkiem Γ i boki, których jest końcem, leżą po przeciwnych stronach prostej ℓ,

(3) p jest wierzchołkiem Γ i boki, których jest końcem, leżą po tej samej stronie ℓ.

Dla $p \in \mathbb{R}^2$ oznaczmy przez $\eta(p)$ liczbę punktów przecięcia typu (1) i (2) łamanej Γ z półprostą $\ell_p = \{p + t(0, 1) : t \in (0, \infty)\}$. Jest ona skończona, bowiem półprosta ℓ_p przecina każdy z boków Γ w co najwyżej jednym punkcie. Możemy więc określić funkcję $\phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \to \mathbb{R}$ wzorem $\phi(p) = (-1)^{\eta(p)}$.

Łatwo zauważyć, że funkcja ϕ jest lokalnie stała, tzn. każdy punkt zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ posiada otoczenie, na którym ϕ przyjmuje stałą wartość. Niech teraz $p = (x, y)$ będzie punktem wewnętrznym jednego z boków łamanej. Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że odcinek

$[(x, y-\varepsilon), (x, y+\varepsilon)]$ nie przecina łamanej Γ poza punktem p. Na tym odcinku funkcja ϕ przyjmuje, po przeciwnych stronach punktu p, zarówno wartość 1, jak i -1, zatem jej dziedzina nie może być zbiorem spójnym – funkcja lokalnie stała określona na zbiorze spójnym jest bowiem stała. Zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ma więc co najmniej dwie składowe spójne.



Pozostaje dowieść, że zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ma co najwyżej dwie składowe spójne. W tym celu dla $p \in \mathbb{R}^2$ i $A \subseteq \mathbb{R}^2$ oznaczmy $d(p, A) = \inf\{d(p, q) : q \in A\}$, gdzie $d(p, q)$ to odległość punktów p i q. Zauważmy, iż istnieje liczba $\varepsilon > 0$, taka że dla dowolnego boku $[a_{i-1}, a_i]$ łamanej Γ zbiór

$$N_i = \Big\{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, [a_{i-1}, a_i]) < \varepsilon\Big\}$$

ma niepusty przekrój jedynie z bokiem $[a_{i-1}, a_i]$ i dwoma bokami sąsiednimi, zaś zbiór $\{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, a_i) < \varepsilon\}$ przecina się jedynie z bokami $[a_{i-1}, a_i]$ oraz $[a_i, a_{i+1}]$. Wobec tego $N_i \setminus \Gamma = N_i \setminus [a_{i-2}, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}]$ i łatwo widać, że $N_i \setminus \Gamma$ ma dwie składowe spójne, N_i^+ i N_i^-, złożone z punktów p dla których wartość $\phi(p)$ jest odpowiednio dodatnia bądź ujemna. Przekroje $N_i^+ \cap N_{i+1}^+$ oraz $N_i^- \cap N_{i+1}^-$ są niepuste dla dowolnego i, zatem zbiory $N^+ = N_1^+ \cup N_2^+ \cup \ldots \cup N_n^+$ oraz $N^- = N_1^- \cup N_2^- \cup \ldots \cup N_n^-$ są spójne. Każdy punkt zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ można połączyć odcinkiem z jednym spośród tych zbiorów, co dowodzi, że istnieją dokładnie dwie składowe spójne dopełniena Γ. □

Łamana zamknięta zwyczajna Γ, jako skończona suma odcinków, jest ograniczona. Istnieje zatem koło otwarte K, zawierające Γ. Wówczas zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus K$ jest spójny i zawiera się w $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, czyli w jednej spośród składowych spójnych N^+ i N^-, zdefiniowanych w dowodzie twierdzenia Jordana-Dehna. Łatwo można się przekonać, iż jest to składowa N^+. Wówczas N^- zawarta jest w K. Wynika stąd, że składowa N^- jest ograniczona, zaś N^+ – nieograniczona.

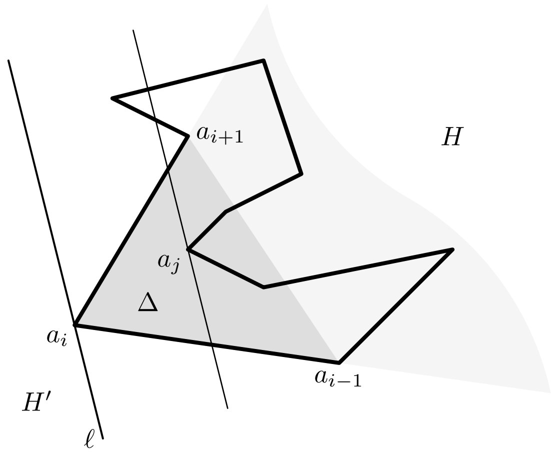
Ponadto, obie składowe spójne $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ są zbiorami otwartymi: jeśli $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, to istnieje koło otwarte K o środku p, rozłączne z Γ, bowiem $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ jest otwarty. Ale K jest zbiorem spójnym, zatem w całości zawiera się w składowej zawierającej punkt p.

Niech $\Gamma = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Zbiór $W(\Gamma)$, będący sumą łamanej Γ oraz ograniczonej składowej spójnej jej dopełnienia, nazywamy *wielokątem* o wierzchołkach $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bokami wielokąta nazywamy w tym wypadku boki łamanej Γ, zaś *przekątnymi* – te spośród odcinków łączących wierzchołki wielokąta, które nie są jego bokami. Wielokąt jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny, bowiem jego dopełnienie – nieograniczona składowa $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ – jest otwarte. Brzegiem wielokąta $W(\Gamma)$ jest łamana Γ, zaś wnętrzem – ograniczona składowa dopełnienia Γ.

Wierzchołek a_i wielokąta $W(\Gamma)$ jest punktem wspólnym dwóch jego boków. Przedłużając te boki do półprostych o końcu a_i, podzielimy płaszczyznę na dwa kąty. Jeśli K jest kołem o środku a_i i dostatecznie małym promieniu, to przekrój K z każdym z tych kątów zawiera się w domknięciu jednej ze składowych spójnych dopełnienia Γ. *Kątem wewnętrznym* przy wierzchołku a_i nazywamy ten spośród dwóch otrzymanych kątów, którego przekrój z K zawiera się w $W(\Gamma)$.

Lemat 2. *Wielokąt $W = W(\Gamma)$ o wierzchołkach $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n \geqslant 4$, posiada przekątną $[a_i, a_j]$, taką że (a_i, a_j) zawiera się we wnętrzu W.*

Dowód. Zauważmy, że istnieje prosta ℓ przechodząca przez pewien wierzchołek a_i wielokąta W i nierównoległa do żadnego z jego boków, która rozcina $\mathbb{R}^2$ na dwie półpłaszczyzny otwarte H i H' w ten sposób, że wszystkie wierzchołki W różne od a_i należą do H.



Zbiór Δ będący sumą wnętrza trójkąta o wierzchołkach a_{i-1}, a_i, a_{i+1} oraz odcinka otwartego (a_{i-1}, a_{i+1}) zawiera się w kącie wewnętrznym wielokąta W o wierzchołku a_i. Jeśli Δ i Γ są rozłączne, to przekątna $[a_{i-1}, a_{i+1}]$ spełnia tezę lematu. Jeśli nie, to Δ zawiera przynajmniej jeden wierzchołek W. Niech a_j będzie wierzchołkiem W zawartym w Δ, którego odległość od prostej ℓ jest najmniejsza. Wtedy $[a_i, a_j]$ spełnia tezę lematu. □

Triangulacją wielokąta W nazywamy skończoną rodzinę $T_W = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}$ trójkątów spełniających następujące warunki:

(1) $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_k = W$,

(2) jeśli $\Delta, \Delta' \in T_W$ i $\Delta \neq \Delta'$, to przekrój $\Delta \cap \Delta'$ jest wspólnym bokiem bądź wspólnym wierzchołkiem trójkątów Δ oraz Δ',

(3) wierzchołki każdego trójkąta $\Delta \in T_W$ są wierzchołkami wielokąta W.

Twierdzenie 3. *Każdy wielokąt $W = W(\Gamma)$ posiada triangulację.*

Dowód. Niech $\Gamma = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem n. Gdy $n = 3$, to wielokąt W jest trójkątem i rodzina $\{W\}$ spełnia warunki wymagane od triangulacji. Załóżmy więc, że $n > 3$ oraz wszystkie wielokąty o mniej niż n wierzchołkach posiadają triangulacje. Niech $[a_i, a_j]$ będzie przekątną wielokąta W, której wnętrze jest zawarte we wnętrzu W. Punkty a_i oraz a_j rozcinają łamaną zamkniętą Γ na dwie łamane, które po uzupełnieniu odcinkiem $[a_i, a_j]$ stają się łamanymi zamkniętymi zwyczajnymi Γ_1 oraz Γ_2. Ograniczają one dwa wielokąty, $W_1 = W(\Gamma_1)$ oraz $W_2 = W(\Gamma_2)$, które pokrywają W, a ich przekrojem jest $[a_i, a_j]$. Każdy z tych wielokątów ma mniej niż n wierzchołków, zatem na mocy założenia indukcyjnego, istnieją triangulacje T_1 oraz T_2 wielokątów W_1 i W_2. Wówczas łatwo się przekonać, że $T = T_1 \cup T_2$ jest triangulacją W. □