Kilka uwag o sumach nieskończonych

Literatura: Łojasiewicz, Stasica, *Analiza formalna i funkcje analityczne*

Niech X będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Mówimy, że szereg o wyrazach $a_t \in \boldsymbol{C}$, $t \in X$, jest zbieżny do wartości A, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór skończony $S_0 \subset X$, taki że

$$\left|\sum_{t\in S} a_t - A\right| < \varepsilon$$

dla skończonych $S_0 \subset S \subset X$. Piszemy wtedy $A = \sum_{t\in X} a_t$.

0.1. *Szereg $\sum_{t\in X} a_t$ jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest absolutnie zbieżny.*

Ciąg S_j skończonych podzbiorów X będziemy nazywać *współkońcowym*, jeśli dla każdego skończonego $S \subset X$ istnieje $j \in \boldsymbol{N}$, takie że $S \subset S_j$.

0.2. *Szereg o wyrazach a_t, $t \in X$, jest zbieżny do sumy A, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego współkońcowego ciągu $S_j \subset X$*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{t\in S_j} a_t = A.$$

Rozważmy przyład $X = \boldsymbol{N}$. Niech $S_j = \{n \in \boldsymbol{N} : n \le j\}$. Jest to ciąg współkońcowy. Zbieżność szeregu w zwykłym sensie oznacza zbieżność ciągu $A_j = \sum_{n\in S_j} a_j$ i nie pociąga zbieżności w sensie podanym wyżej, bo nie pociąga zbiezności absolutnej.

0.3. *Niech $S_j \subset X$ będzie ustalonym ciągiem współkońcowym i niech*

$$\sup_{j\in\boldsymbol{N}} \sum_{t\in S_j} |a_t| < \infty.$$

Wtedy szereg jest zbieżny i

$$\sum_{t\in X} a_t = \lim_{j\to\infty} \sum_{t\in S_j} a_t. \tag{\%}$$

Niech na przykład $X = \boldsymbol{A}$ będzie zbiorem n-wymiarowych mulitindeksów α. Wtedy, przyjąwszy $S_j = \{\alpha : |\alpha| \le j\}$, mamy

$$\sum_{\alpha\in\boldsymbol{A}} |a_\alpha| < \infty \quad \iff \quad \sup_{j\in\boldsymbol{N}} \sum_{|\alpha|\le j} |a_\alpha| < \infty.$$

0.4 (prawo łączności). *Niech $X = \bigcup_n X_n$, gdzie $\{X_n\}$ jest rodziną parami rozłącznych podzbiorów X. Wtedy*

$$\sum_{t\in X} a_t = \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \sum_{t\in X_n} a_t,$$

jeśli jedna ze stron równości przedstawia sumę zbieżną.

0.5. *Niech X, Y będą nieskończonymi zbiorami przeliczalnymi. Jeśli*

$$\sum_{t\in X} \sum_{s\in Y} |a_{t,s}| < \infty,$$

to
$$\sum_{(t,s)\in X\times Y} |a_{t,s}| < \infty$$
oraz
$$\sum_{(t,s)\in X\times Y} a_{t,s} = \sum_{t\in X}\sum_{s\in Y} a_{t,s} = \sum_{s\in Y}\sum_{t\in X} a_{t,s}.$$

0.6. Wniosek. *Jeśli*

(*)
$$\sum_{\alpha_1\in \boldsymbol{N}}\sum_{\alpha_2\in \boldsymbol{N}}\cdots\sum_{\alpha_n\in \boldsymbol{N}} |a_\alpha| < \infty,$$
to dla każdej permutacji σ
$$\sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} a_\alpha = \sum_{\alpha_{\sigma(1)}\in \boldsymbol{N}}\sum_{\alpha_{\sigma(2)}\in \boldsymbol{N}}\cdots\sum_{\alpha_{\sigma(n)}\in \boldsymbol{N}} a_\alpha.$$

0.7 (mnożenie szeregów). *Niech szeregi* $A = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} a_\alpha$ *i* $B = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} b_\alpha$ *będą zbieżne. Wtedy szereg* $C = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} c_\alpha$*, gdzie*
$$c_\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} a_\beta b_{\alpha-\beta},$$
jest zbieżny i $C = AB$*.*

Dowód. Mamy
$$AB = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} a_\alpha \cdot \sum_{\beta\in \boldsymbol{A}} b_\beta = \sum_{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{A}\times \boldsymbol{A}} a_\alpha b_\beta.$$
Niech $X = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ i niech $X_\gamma = \{(\alpha,\beta)\in X : \alpha+\beta=\gamma\}$. Wtedy na mocy prawa łączności
$$\sum_{(\alpha,\beta)\in \boldsymbol{A}\times \boldsymbol{A}} a_\alpha b_\beta = \sum_{\gamma\in \boldsymbol{A}}\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\gamma = \sum_{\gamma\in \boldsymbol{A}} c_\gamma.$$
□

0.8. *Jeśli szereg potęgowy* $\sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} c_\alpha$ *jest zbieżny dla pewnego* $x = u$*, gdzie* $u_k \ne 0$ *dla każdego* $1\le k\le n$*, to dla każdych* $r_1, r_2, \dots r_k$*, takich że* $0 < r_k < |u_k|$*,*
$$\sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n} < \infty.$$
Stąd wynika, że funkcja
$$f(x) = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} c_\alpha x^\alpha, \qquad x\in U = \prod_{k=1}^n (-r_k, r_k),$$
jest klasy $C^\infty(U)$ *i jej pochodne* $D^\alpha f$ *wyrażają się szeregami potęgowymi zbieżnymi absolutnie w* U*.*

Funkcja f określona w otoczeniu U punktu $a\in \boldsymbol{R}^n$ nazywa się analityczna w punkcie a, co oznaczamy przez $f\in\mathcal{A}(a)$, jeśli istnieją współczynniki c_α i otoczenie $a\in V\subset U$, takie że
$$f(x) = \sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} c_\alpha (x-a)^\alpha$$
dla $x\in V$. Można założyć, że $V = \prod_{k=1}^N (a_k - r_k, a_k + r_k)$ i
$$\sum_{\alpha\in \boldsymbol{A}} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}\dots r_n^{\alpha_n} < \infty.$$

0.9. *Niech*

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)),$$

gdzie $g_k \in \mathcal{A}(a)$. *Niech* $f \in \mathcal{A}(b)$, *gdzie* $b = g(a)$. *Wtedy funkcja* $f \circ g$ *jest też analityczna w punkcie* a.

Dowód. Niech

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} c_\alpha (y-b)^\alpha, \qquad \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n} < \infty,$$

oraz dla każdego $1 \le k \le n$

$$g_k(x) = \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} c_{\beta,k} (x-a)^\beta, \qquad \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} |c_{\beta,k}| \rho_1^{\beta_1} \rho_2^{\beta_2} \dots \rho_n^{\beta_n} < r_k.$$

Na mocy twierdzenia o mnożeniu szeregów

$$(g(x) - b)^\alpha = \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} d_{\alpha,\beta} (x-a)^\beta,$$

gdzie

$$\sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} |d_{\alpha,\beta}| \rho_1^{\beta_1} \rho_2^{\beta_2} \dots \rho_n^{\beta_n} < r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n}.$$

Wobec tego

$$f(g(x)) = f\big(b + (g(x) - b)\big) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} c_\alpha (g(x) - b)^\alpha.$$

Zauważmy teraz, że

$$\sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} |c_\alpha| |d_{\alpha,\beta}| |(x-a)^\beta| < \infty,$$

więc

$$f(g(x)) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} c_\alpha \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} d_{\alpha,\beta} (x-a)^\beta = \sum_{\beta \in \boldsymbol{A}} d_\beta (x-a)^\beta,$$

gdzie

$$d_\beta = \sum_\alpha c_\alpha d_{\alpha,\beta}.$$

□

0.10. *Niech*

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} c_\alpha x^\alpha, \qquad x \in U = \prod_{k=1}^n (-r_k, r_k),$$

gdzie $\sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n} < \infty$. *Wówczas, dla każdego* $x \in U$ *i każdego* $h \in U(x) = \prod_{k=1}^n \big(-(r_k - |x_k|), r_k - |x_k|\big)$,

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} c_\alpha(x) h^\alpha,$$

gdzie

$$\sum_{\alpha \in \boldsymbol{A}} |c_\alpha(x)| \rho_1(x)^{\alpha_1} \rho_2(x)^{\alpha_2} \dots \rho_n(x)^{\alpha_n} < \infty, \qquad \rho_k(x) = r_k - |x_k|.$$

Innymi słowy, funkcja zadana szeregiem potęgowym jest analityczna nie tylko w punkcie 0, *ale także w każdym punkcie otoczenia* U.