Funkcje harmoniczne #1

1. Zbadaj, dla jakich n funkcja $F(x) = \log|x|$ jest harmoniczna na $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$.

2. Znajdź wszystkie funkcje harmoniczne na przedziale $(0,1) \subset \boldsymbol{R}$.

3. Korzystając z całkowego przedstawienia Cauchy'ego funkcji holomorficznej, sprawdź, że ma ona własność średniej.

4. Sprawdź, że funkcja $p(x,y) = y(x^2+y^2)^{-1}$ jest harmoniczna w zbiorze $\Omega = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : y > 0\}$.

5. Pokaż, że jeśli u i v są funkcjami harmonicznymi na $\boldsymbol{R}^n$, to ich iloczyn uv jest funkcją harmoniczną, wtedy i tylko wtedy gdy $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$.

6. Niech u będzie rzeczywistą funkcją harmoniczną w $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Udowodnij, że jeśli u^2 jest też funkcją harmoniczną, to u jest stała. Pokaż na przykładzie w $\boldsymbol{R}^2$, że teza nie jest prawdziwa, gdy u nie jest rzeczywista.

7. Pokaż, że $\Delta|x|^\lambda = \lambda(\lambda+n-2)|x|^{\lambda-2}$. Wywnioskuj, że funkcja $N(x) = |x|^{2-n}$ jest harmoniczna na $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ dla $n > 1$.

8. Funkcja u jest harmoniczna w $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Pokaż, że funkcja $v(x) = \langle \nabla u(x), x \rangle$ jest również harmoniczna.

9. Funkcja u na $\boldsymbol{R}^n$ nazywa się radialna, jeśli istnieje funkcja v, taka że $u(x) = v(|x|)$ dla $x \in \boldsymbol{R}^n$. Pokaż, że radialna funkcja harmoniczna jest stała.

10. Dana jest funkcja harmoniczna u na $\boldsymbol{R}^2$. Definiujemy nową funkcję wzorem

$$\begin{aligned} 2v(x,y) = &\int_0^y \Big(\partial_1 u(x,t) + \partial_1 u(0,t)\Big)\,dt \\ &- \int_0^x \Big(\partial_2 u(t,y) + \partial_2 u(t,0)\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Pokaż, że v jest funkcją harmoniczną, a $f = u + iv$ funkcją holomorficzną na $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^2$.

11. Sprawdź, że funkcja

$$p(t,x) = \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{n/2}}, \qquad t \in \boldsymbol{R},\ x \in \boldsymbol{R}^n,$$

jest funkcją harmoniczną w $\Omega = \{(t,x) \in \boldsymbol{R}^{n+1} : t > 0\}$. **(pg)**