Funkcje harmoniczne #2

1. Udowodnij, że niemal jednostajna granica ciągu funkcji harmonicznych jest funkcją harmoniczną.

2. Udowodnij, że jeśli u jest funkcją harmoniczną w otoczeniu $\overline{B}(a,r)$, to

$$u(a) = \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{B(a,r)} u(x)\, dx.$$

3. Zbiór otwarty $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ jest spójny, a u jest rzeczywistą funkcją harmoniczną na Ω. Pokaż, że $u(\Omega)$ jest zbiorem otwartym lub jednopunktowym.

4. Niech T będzie liniowym przekształceniem $\boldsymbol{R}^n$, takim że $u \circ T$ jest funkcją harmoniczną na $\boldsymbol{R}^n$, jesli tylko u jest harmoniczna na $\boldsymbol{R}^n$. Udowodnij, że T jest przekształceniem ortogonalnym.

5. Dla $f \in C(S)$ niech $\widetilde{f}(x) = \int_S P(x,y) f(y) \overline{dy}$. Sprawdź, że

$$(f \circ T)^{\sim} = \widetilde{f} \circ T$$

dla każdego ortogonalnego przekształcenia T.

6. Niech u będzie niestałą funkcją rzeczywistą harmoniczną wokół $\overline{B}$. Udowodnij, że istnieje stała $c > 0$, taka że dla każdego $0 < r < 1$

$$u(\zeta_0) - u(r\zeta_0) \geq c(1-r),$$

jeśli ζ_0 jest punktem sfery, gdzie u osiąga największą wartość. Wywnioskuj, że $\partial_n u(\zeta_0) > 0$, gdzie $n(\zeta) = \zeta$ jest wektorem normalnym zewnętrznym.