Funkcje harmoniczne #3

1. Znajdź postać jądra Poissona dla kuli $B(a, r) \subset \boldsymbol{R}^n$.
2. Niech m będzie dodatnią liczbą naturalną. Opisz wszystkie funkcje analityczne u na $\boldsymbol{R}^n$, takie że $u(tx) = t^m u(x)$ dla $x \in \boldsymbol{R}^n$, $t \in \boldsymbol{R}$.
3. Pokaż, że szereg potęgowy, w który rozwija się funkcja harmoniczna na $\boldsymbol{R}^n$, jest wszędzie zbieżny.
4. Sprawdź, że jeśli $\sum_\alpha |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_n^{\alpha_n} < \infty$, to funkcja zadana szeregiem potęgowym
$$S(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$$
jest analityczna w $(-r_1, r_1) \times (-r_2, r_2) \times \cdots \times (-r_n, r_n)$.
5. Przypuśćmy, że u jest funkcją ciągłą na $\overline{B}$ i że dla każdego $x \in B$ istnieje $r = r(x) > 0$, takie że
$$f(x) = \int_S f(x + ry)\, \frac{dy}{\omega_{n-1}}.$$
Pokaż, że f jest funkcją harmoniczną w B.

(pg)