Funkcje harmoniczne #4

1. Pokaż, że obrazem kuli $B(a, r)$ przez inwersję jest
a) kula $B(A, R)$, gdzie $A = \frac{a}{|a|^2 - r^2}$, $R^2 = \frac{r^2(2|a|^2 - r^2)}{|a|^2 - r^2}$, gdy $r < |a|$,
b) $\Big(\boldsymbol{R}^n \setminus B(A, R)\Big) \cup \{\infty\}$, gdzie $A = \frac{a}{|a|^2 - r^2}$, $R = \frac{r}{r^2 - |a|^2}$, gdy $|a| < r$.

2. Dana jest sfera $S(a, r)$ przechodząca przez 0. Pokaż, że jej obrazem przez inwersję jest hiperpłaszczyzna prostopadła do wektora a i przechodząca przez punkt $\frac{a}{|a|^2}$.

3. Pokaż, że funkcja $u(x) = |x|^{2-n} \log |x|$ na $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ jest harmoniczna tylko wtedy, gdy $n = 2$. Możesz skorzystać z transformaty Kelvina.

4. Znajdź Ku, gdy a) $u(x) = |x|^{n-2}$, b) $u(x) = \log |x|$, c) $u(x) = x_n$, d) $u(x) = 1$.

5. Wykaż, że jeśli f jest harmonicznym i jednorodnym stopnia m wielomianem, to funkcja $F(x) = |x|^{n-2(m+1)} f(x)$ jest harmoniczna.

6. Korzystając z transformaty Kelvina, sprawdź bez rachunków, że funkcja $u(x) = \frac{x_k^2 - x_j^2}{|x|^{n+2}}$ jest harmoniczna dla dowolnych $1 \leq k, j \leq n$.

7. Niech $|x| > 1$. Pokaż, że

$$\fint_S \frac{|x|^2 - 1}{|x - y|^n}\, dy \leq |x|^{2-n}.$$

8. Dany jest zbiór domknięty $K \subset S$ miary sferycznej dodatniej. Pokaż, że funkcja

$$u(x) = \int_K P(x, y)\, dy$$

jest harmoniczna, ograniczona i niestała na $\boldsymbol{R}^n \setminus K$.

(pg)