Funkcje harmoniczne #5

1. Podaj przykład ograniczonej funkcji harmonicznej w B, która nie jest jednostajnie ciągła.

2. Niech u będzie funkcją harmoniczną w $B \setminus \{0\}$ i taką, że

$$|x|^{n-2}u(x) \to 0, \qquad \text{gdy} \quad x \to 0.$$

Pokaż, że u ma przedłużenie do funkcji harmonicznej na B.

3. W zbiorze otwartym $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ rozpatrujemy rodzinę $\mathcal{U}$ wszystkich funkcji harmonicznych u, takich że $|u(x)| < 1$ dla $x \in \Omega$. Niech a będzie ustalonym punktem Ω. Udowodnij, że istnieje funkcja $u_0 \in \mathcal{U}$, której gradient $\nabla u_0(a)$ ma największą normę spośród wszystkich gradientów $\nabla u(a)$, gdzie $u \in \mathcal{U}$. W tym celu rozważ ciąg funkcji $u_m \in \mathcal{U}$, taki że

$$|\nabla u_m(a)| > \sup_{u \in \mathcal{U}} |\nabla u(a)| - \frac{1}{m}.$$

4. Niech $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a K jego zwartym podzbiorem. Pokaż, że dla każdego α istnieje stała C_α, taka że

$$|D^\alpha u(x)| \le C_\alpha \|u\|_\infty, \qquad x \in K,$$

dla każdej funkcji u harmonicznej na Ω.

5. Dana jest funkcja harmoniczna u na $\boldsymbol{R}^n$, taka że

$$|u(x)| \le A(1 + |x|)^p,$$

gdzie $p \ge 0$. Pokaż, że u jest wielomianem stopnia co najwyżej p.

6. Wywnioskuj z twierdzenia Liouville'a, że nieujemna funkcja harmoniczna u na $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ musi być stała. W tym celu rozważ funkcję $z \to u(e^z)$.

7. Wykaż, że nie istnieje funkcja harmoniczna v w otoczeniu ∞ w $\boldsymbol{R}^n$, gdzie $n \ge 3$, taka że $\lim_{x \to \infty} v(x) = \infty$.

(pg)