Funkcje harmoniczne #6

1. Niech u będzie nieujemną funkcją harmoniczną w $B(a,R)$ i niech $|x-a| \le r < R$. Pokaż, że

$$\frac{1-\frac{r}{R}}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}}\, u(a) \le u(x) \le \frac{1+\frac{r}{R}}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}}\, u(a)$$

i wyprowadź stąd twierdzenie Liouville'a dla nieujemnych funkcji harmonicznych.

2. Wyprowadź twierdzenie Liouville'a dla ograniczonych funkcji harmonicznych z tegoż twierdzenia dla funkcji harmonicznych nieujemnych.

3. Na produkcie $\Omega \times \Omega$ definiujemy

$$s(x,y) = \sup\left\{\frac{u(x)}{u(y)} : 0 \ne u \in \mathcal{H}_+(\Omega)\right\}.$$

Udowodnij, że s jest funkcją ciągłą.

4. Funkcja u jest harmoniczna i nieujemna w B. Pokaż, że

$$|D^\alpha U(x)| \le \frac{C_\alpha u(0)}{(1-|x|)^{n-1+|\alpha|}}.$$

5. Udowodnij, że punktowo zbieżny ciąg nieujemnych funkcji harmonicznych jest zbieżny jednostajnie na każdym zbiorze zwartym.

6. Przypuśćmy, że $n > 2$ i że funkcja harmoniczna w $B\setminus\{0\}$ spełnia oszacowanie

$$u(x) \ge -C|x|^{2-n}, \qquad x \in B \setminus \{0\},$$

dla pewnego $C > 0$. Pokaż, że

$$u(x) = a|x|^{2-n} + v(x),$$

gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, a $v \in \mathcal{H}(B)$.

(pg)