

## Funkcje harmoniczne #7

1. Czy funkcja stała w  $\mathbf{R}^n$  jest harmoniczna w nieskończoności?
2. Dana jest funkcja  $u \in \mathcal{H}_+(\mathbf{R}^n \setminus K)$ , gdzie  $n > 2$ , a  $K \subset \mathbf{R}^n$  jest zwarty. Pokaż, że

$$u(x) = a + w(x),$$

gdzie  $a \geq 0$ , a  $w$  jest harmoniczna w  $\infty$ . Przeprowadź dyskusję przypadków  $n = 1, 2$ .

3. Niech  $u \in \mathcal{H}_+(B \setminus \{0\})$ . Pokaż, że istnieje  $v \in \mathcal{H}(B)$ , taka że

$$u(x) = Au(x) + v(x) \quad x \in B,$$

Wskazówka: Pokaż najpierw, że dla każdego  $m \in \mathbf{N}$  istnieje  $v_m \in \mathcal{H}(B)$ , taka że

$$u(x) = Au\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)x\right) + v_m(x), \quad x \in B,$$

4. Znajdź ogólną postać funkcji harmonicznej radialnej w a)  $B \setminus \{0\}$ , b) w  $B$ .
5. Niech  $n > 2$ . Niech  $a, b \in \mathbf{R}^n$  i niech  $a \neq b$ . Niech  $u \in \mathcal{H}_+(\mathbf{R}^n \setminus \{a, b\})$ . Pokaż, że istnieje funkcja  $v \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ , taka że
$$u(x) = \alpha|x - a|^{2-n} + \beta|x - b|^{2-n} + v(x), \quad x \notin \{a, b\},$$
gdzie  $\alpha, \beta \geq 0$ .

(pg)