

Funkcje harmoniczne #8

1. Oblicz transformatę Kelvina funkcji $f(x) = x_n$ w \mathbf{R}^n .
2. Wykaż, że jacobian inwersji $x \rightarrow x^*$ w \mathbf{R}^n jest równy $-1/|x|^{2n}$.
3. Pokaż, że jeśli $n > 2$, to jedyną funkcją harmoniczną na $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ jest funkcja zerowa. Jak to wygląda w \mathbf{R}^2 ?
4. Jak zachowuje się funkcja harmoniczna nieujemna w otoczeniu nieskończoności?
5. Dany jest wektor jednostkowy $a \in \mathbf{R}^n$, $n > 1$. Niech φ_R będzie symetrią względem sfery $S(Ra, R)$. Pokaż, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi_R(x) = \psi_a(x), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

gdzie ψ_a jest symetrią względem hiperpłaszczyzny $\langle x, a \rangle = 0$.

6. Niech φ będzie symetrią względem pewnej sfery. Pokaż, że jeśli wektory u i v są prostopadłe, to także $\varphi'(x)u \perp \varphi'(x)v$ dla każdego x .

(pg)