

PROSEMINARIUM 2

MIARA, CIĄGŁOŚĆ I RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Łagodne wprowadzenie do analizy rzeczywistej

Jeśli ukończyłeś kurs analizy i myślisz, że wiesz już wszystko na temat różniczkowania i całkowania, to to seminarium jest właśnie dla Ciebie. Jego celem będzie wstępne zaprezentowanie możliwości analizy wzbogaconej o środki, jakich używają jej teoria miary i topologia metryczna.

Będziemy się zastanawiać na przykład nad pytaniem, dla jakich funkcji $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ obowiązuje *podstawowa reguła rachunku różniczkowego i całkowego* wiążąca pochodną z całką:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Z analizy I wiemy, że tak jest dla funkcji mających ciągłą pochodną na całym przedziale $[a, b]$. Uzbrojeni w potężne narzędzie, jakim jest miara Lebesgue'a, będziemy mogli rozważyć to pytanie w znacznie szerszym kontekście i dojść do pojęcia *absolutnej ciągłości* funkcji. Okaże się też, że warto rozważać funkcje różniczkowalne *prawie wszędzie*. W celu lepszego zrozumienia, czym jest ciągłość i czym pochodna rozłożymy te pojęcia na „części składowe” i zobaczymy, że można z sensem mówić o *aproksymatywnej ciągłości* i *aproksymatywnej pochodnej* i zadać wiele nowych w stosunku do standardowych treści wykładu kursowego pytań dotyczących funkcji i zbiorów na prostej. Otworzy to przed nami drogę do współczesnej analizy rzeczywistej, także w wielu wymiarach. Analiza w \mathbf{R}^n pozostanie jednak bardziej horyzontem i zachętą na przyszłość niż tematyką tego seminarium.

Dowiemy się, jak z punktu teorii różniczkowania prezentują się już poznane, ale jeszcze mało znane, a także zupełnie nowe klasy funkcji *monotonicznych*, *o wahanii ograniczonym*, *lipschitzowskich*, *wypukłych*, *absolutnie ciągłych* i *różniczkowalnych*.

Od Słuchaczy oczekuje się znajomości podstawowego kursu analizy, topologii i teorii miary. Sposób pracy i warunki zaliczenia zostaną omówione na pierwszych zajęciach.

Na zakończenie chciałbym jeszcze zacytować to, co usłyszałem niedawno od znanego matematyka. Powiedział on: *Niewiele jeszcze rozumiem z analizy na prostej i nadal wydaje mi się trudna.*

Literatura

- [1] Kannan, Krueger, Advanced analysis on the real line,
- [2] Kingman, Taylor, Measure and probability, rozdziały 9.1–9.3,
- [3] Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, rozdział 8.

Serdecznie zapraszam!

Paweł Głowacki