Twierdzenie Eberleina-Smulyana

Twierdzenie Eberleina-Smulyana poprzedzimy następującą charakteryzacją *słabo domkniętych podprzestrzeni przestrzeni dualnej.

0.1. Twierdzenie. *Niech M' będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni X' dualnej do przestrzeni Banacha X. Jeśli przekrój M' kulą jednostkową B' jest *słabo domknięty, to M' jest *słabo domknięta.*

Dowód. Z założenia wynika ,że przekrój M z każdą kulą jest *słabo domknięty. Niech $x_0' \notin M'$. Dla $F \subset X$ niech

$$F' = \{x' \in X' : | < x' - x_0', x > | \leqslant 1,\ x \in F\}.$$

Pokażemy, że

0.2. *Istnieje ciąg wektorów $x_n \in X$ zbieżny do zera, taki że $F' \cap M' = \emptyset$, gdzie $F = \{x_n : n \geqslant 1\}$.*

W tym celu skonstruujemy ciąg skończonych podzbiorów $F_n \subset X$ i ciąg liczb $r_n > 0$, takich że

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_k'\Big) \cap B_{x_0'}'(r_n) \cap M' = \emptyset, \qquad \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_k'\Big) \cap B_{x_0'}'(r_{n+1}) \cap M' \neq \emptyset, \tag{0.3}$$

gdzie $F_n \subset B(1/r_{n-1})$ i $r_n \nearrow \infty$.

Zauważmy najpierw, że zbiór $M' \cap B_{x_0}'(1)$ jest wypukły i *słabo domknięty i wobec tego istnieje wektor $x_1 \in X$, taki że

$$\{x' \in X' : | < x' - x_0', x_1 > | \leqslant 1\} \cap B_{x_0'}'(1) \cap M' = \emptyset.$$

Połóżmy $F_1 = \{x_1\}$, $r_0 = 0$. Możemy też przyjąć, że istnieje liczba $r_1 > 0$, taka że

$$F_1' \cap B_{x_0'}'(r_1) \cap M' \neq \emptyset,$$

bo w przeciwnym razie jakikolwiek ciąg dążący do zera o pierwszym wyrazie x_1 spełniałby (0.2).

Załóżmy indukcyjnie, że dane są skończone zbiory $F_1, F_2, \dots, F_n$ i liczby $r_0 < r_1 < \cdots < r_{n+1}$, takie że spełnione są zależności (0.3). Gdyby dla każdego skończonego podzbioru $E \subset B(r_n^{-1})$

$$E' \cap \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_k'\Big) \cap B_{x_0'}(r_{n+1}) \cap M' \neq \emptyset,$$

to ze względu na *słabą zwartość zbioru $\Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_k'\Big) \cap B_{x_0'}(r_{n+1}) \cap M'$ istniałby też element

$$x_1' \in \Big(\bigcap_{k=1}^{n} F_k'\Big) \cap M'$$

spełniający $| < x' - x_0', x > | \leqslant 1$ dla wszystkich $\|x\| \leqslant r_n^{-1}$, a więc leżący w $B_{x_0'}'(r_n)$. To jednak przeczy założeniu indukcyjnemu. Zatem dla pewnego zbioru $E = F_{n+1} \subset B(r_n^{-1})$ uzyskujemy pierwszy warunek z (0.3). Podobnie jak w pierwszym kroku wolno nam przyjąć, że dla pewnego $r_{n+1} \geqslant r_n + 1$ spełniony jest rownież drugi z warunków (0.3). To kończy konstrukcję. Porządkując teraz w jakikolwiek sposób elementy przeliczalnego zbioru $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_k$ w ciąg (x_n), otrzymujemy żadaną tezę (0.2).

Niech $T : X' \to c_0$ będzie zadane wzorem $Tx' = c$, gdzie $c_n =< x', x_n >$. Nietrudno zauważyć, że T jest liniowe i ograniczone, a ponadto

$$\operatorname{dist}(Tx_0', T(M')) = \inf_{x' \in M'} \sup_{n} | < x - x_0', x_n > | \geqslant 1.$$

Zatem Tx_0' leży poza przestrzenią liniową $\overline{T(M')}$. Istnieje wobec tego ciągły funkcjonał liniowy f na c_0

$$f(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty,$$

taki że $f(M') = \{0\}$ i $f(Tx_0') = 1$. Wtedy jednak $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ jest elementem X, takim że $< x', x >= 0$ dla $x' \in M'$ i $< x_0', x >= 1$, co oznacza, że x_0' leży w pewnym otoczeniu otwartym w topologii *słabej rozłącznym z M'. Wobec dowolności x_0' przestrzeń M' jest *słabo domknięta. □

0.4. Wniosek. *Niech f będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni dualnej X'. Jeżeli zbiór*

$$N_1(f) = \{x' \in X' : f(x') = 0,\ \|x'\| \leqslant 1\}$$

*jest *słabo domknięty, to istnieje wektor $x \in X$, taki że $f(x') =< x, x' >$ dla $x' \in X'$.*

Dowód. Rzeczywiście, z twierdzenia wynika, że jądro f jest *słabo domknięte, więc f jest funkcjonałem *słabo ciągłym. Każdy taki funkcjonał jest wyznaczony przez element X w opisany sposób. □

0.5. Wniosek. *Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Wówczas każdy *słabo ciągowo ciągły funkcjonał f na X' jest *słabo ciągły, a więc jest postaci $f(x') =< x, x' >$, $x' \in X'$, dla pewnego $x \in X$.*

Dowód. Wystarczy zwrócić uwagę, że jeśli X jest ośrodkowa, to kula B' jest metryzowalna w *słabej topologii. □

Wiadomo, że ograniczony ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy ma dokładnie jeden punkt skupienia. A oto odpowiednik tego faktu w przestrzeni Banacha.

0.6. Lemat. *Niech M będzie słabo zwartym podzbiorem przestrzeni Banacha. Ciąg (x_n) o wyrazach w M jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy zbiór*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_k : k \geqslant n\}^w$$

jest jednopunktowy.

0.7. Twierdzenie (Eberlein-Smulyan). *Podzbiór M przestrzeni Banacha X jest warunkowo słabo zwarty, wtedy i tylko wtedy gdy jest warunkowo słabo ciągowo zwarty.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że WSC (warunkowa słaba ciągowa) zwartość pociąga WS (warunkową słabą) zwartość. Niech więc $M \subset X$ będzie WSC zwarty. M jest ograniczony, więc po zanurzeniu $M \subset X \subset X''$ jego *słabe domknięcie M^{*w} jest *słabo zwarte. Słaba topologia w X jest odziedziczoną *słabą topologią X'', więc jeśli M^w oznacza słabe domknięcie w X, to $M^w = M^{*w} \cap X$. Aby więc udowodnić naszą tezę, wystarczy pokazać, że $M^{*w} \subset X$.

Przypuśćmy, że $x''_0 \in M^{*w}$. Na mocy Wniosku 0.4 wystarczy pokazać, że zbiór $N_1(x''_0)$ jest *słabo domknięty. Niech $y'_0 \in N(x''_0)^{*w}$. Stąd i z faktu, że $x''_0 \in M^{*w}$ wynika, że dla zadanego z góry $\varepsilon > 0$ istnieją ciągi $x_n \in M$ i $y_k \in N(x''_0)$, takie że

$$| < x_n - x''_0, y'_k > | = | < x_n, y_k > | < \varepsilon, \qquad k < n, \tag{0.8}$$

oraz

$$| < x_n, y'_k - y'_0 > | < \varepsilon, \qquad n \leqslant k. \tag{0.9}$$

Z WSC zwartości zbioru M wynika, że możemy przyjąć (po wybraniu odpowiedniego podciągu), że ciąg $x_n \to x$ słabo. Co więcej, na mocy twierdzenia Mazura możemy wyrazy ciągu x_n zastąpić (nie zmieniając oznaczeń) przez ich wypukłe kombinacje, tak że $x_n \to x$ w normie. Zwróćmy uwagę, że postępując analogicznie z elementami ciągu (y_k) zachowujemy własności (0.8) i (0.9). W takim razie,

$$| < x - x''_0, y'_k > | = | < x, y'_k > | < \varepsilon, \qquad k \in \boldsymbol{N},$$

a po przejściu do *słabej granicy

$$| < x - x''_0, y'_0 > | = | < x, y'_0 > | < \varepsilon,$$

skąd $| < x''_0, y'_0 > | < \varepsilon$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ funkcjonał y'_0 leży w $\in N_1(x''_0)$, co kończy tę część dowodu.

Teraz zakładamy, że M jest zbiorem WS zwartym. Zamierzamy wykazać, że jest WSC zwarty. Niech (x_n) będzie ciągiem o wyrazach w M. Oznaczmy przez X_0 domkniętą podprzestrzeń X rozpiętą na zbiorze $\{x_n : n \geqslant 1\}$. Zastępując X przez X_0, możemy przyjąć, że X jest ośrodkowa. Wobec tego kula jednostkowa B' w X' jest *słabo metryzowalna, a jako *słabo zwarta jest też ośrodkowa. Niech H będzie przeliczalnym *słabo gęstym podzbiorem B'. Zauważmy, że rodzina funkcjonałów H jest totalna na X. Z ciągu (x_n) metodą przekątniową wybieramy podciąg (y_n), taki że dla każdego $h \in H$ ciąg liczbowy $< y_n, h >$ jest zbieżny. Ponieważ M_0 jest WS zwarty scentrowana rodzina zbiorów

$$A_n = \{y_k : k \geqslant n\}^w$$

ma niepusty przekrój A. Jeśli $y_1, y_2 \in A$, to, jak nietrudno zauważyć istnieją podciągi (u_n) i (v_n) ciągu (y_n) zbieżne odpowiednio do y_1 i y_2. Ale wtedy $< y_1, h >=< y_2, h >$ dla każdego $h \in H$, co pociąga $y_1 = y_2$, bo H jest totalny. Zatem na mocy Lematu 0.6 ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny. □

Jak dobrze wiadomo, w przestrzeni wektorowej skończonego wymiaru wypukła otoczka zbioru zwartego jest zbiorem warunkowo zwartym, co łatwo wynika z charakteryzacji zbiorów zwartych jako domkniętych i ograniczonych. Twierdzenie Eberleina-Smulyana umożliwia uogólnienie tego faktu na podzbiory słabo zwarte przestrzeni Banacha. Dodajmy, że rola twierdzenia Eberleina-Smulyana w poniższym dowodzie sprowadza się do redukcji zagadnienia do przestrzeni ośrodkowych. W przypadku ośrodkowej przestrzeni Banacha poniższy dowód obywa się bez wyżej wyłożonej teorii.

0.10. Wniosek (Krein-Smulyan). *Jeśli M jest słabo zwartym podzbiorem przestrzeni Banacha, to jego wypukła otoczka* co(M) *jest warunkowo słabo zwarta.*

Dowód. Dzięki twierdzeniu Eberleina-Smulyana wystarczy udowodnić, że zbiór co(M) jest WSC zwarty. Niech więc (x_n) będzie ciągiem elementów co(M). Pokażemy, że ciąg ten ma podciąg słabo zbieżny w X. Oznaczmy przez X_0 domkniętą podprzestrzeń X rozpiętą na zbiorze $\{x_n : n \geqslant 1\}$. Zastępując X przez X_0, możemy przyjąć, że X jest ośrodkowa. Oczywiście możemy też przyjąć, że zbiór M jest niepusty.

Niech μ będzie regularną miarą borelowaką na M, czyli elementem $C(M)'$. Wtedy istnieje dokładnie jeden $x_\mu \in X$, taki że

$$< x_\mu, x' >= \int_M < x, x' > \mu(dx),$$

co łatwo wynika z Wniosku 0.5 i twierdzenia Lebesgue'a. Otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$C(M)' \ni \mu \to x_\mu \in X,$$

które jest liniowe i ciągłe, gdy przestrzeń $C(M)'$ wyposażona jest w topologię *słabą, a X w topologię słabą. Ciągłość odwzorowania wynika ze wzoru

$$< x_\mu - x_\nu, x' >=< x'|M, \mu - \nu >, \qquad x' \in X',\ \mu, \nu \in C(M)'.$$

Wobec tego obraz kuli jednostkowej $B_{C(M)'}$ przez to odwzorowanie jest zbiorem wypukłym i słabo zwartym w X. Aby zakończyć cały dowód, wystarczy teraz zauważyć, że M zawiera się w tym obrazie. Rzeczywiście, jeśli $x_0 \in M$, a δ_{x_0} jest miarą Diraca skupioną w x_0, to

$$< x_{\delta_{x_0}}, x' >= \int_M < x, x' > \delta_{x_0}(dx) =< x_0, x' >,$$

skąd $x_0 = x_{\delta_{x_0}}$. Zatem co(M) jest zbiorem warunkowo słabo zwartym. □

0.11. *Uwaga.* Niech X będzie topologiczną przestrzenią wektorową, a $M \subset X$ zbiorem słabo zwartym. Nie zawsze zbiór co(M) jest warunkowo słabo zwarty. Potrzebny jest jeszcze pewien dodatkowy warunek zupełności (w topologii Mackeya) przestrzeni topologicznej co$(M)^w$.

Literatura

[1] Dunford-Schwartz, Linear operators, vol I, rozdział V, punkt 6,
[2] Yosida, Functional Analysis, Appendix do rozdziału V, punkt 4,
[3] Shaefer, Topological vector spaces, rozdział IV, punkt 11.