1. Półgrupy operatorów ograniczonych (notatki do wykładu)

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

1. Odwzorowanie wykładnicze $\exp : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ definiujemy znanym szeregiem potęgowym

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

2. Jeśli operatory $A, B \in \mathcal{B}(x)$ komutują, to $e^{A+B} = e^A e^B$.

3. Dla każdego $n \geqslant 2$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \leqslant \frac{\|A^2\|}{2n} e^{\|A\|}.$$

4. Jeśli F jest odwzorowaniem ciągłym o wartościach w przestrzeni Banacha, to

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(s)\, ds = F(t).$$

Jeśli F jest klasy C^1, to

$$\int_a^b \frac{d}{ds} F(s)\, ds = F(b) - F(a).$$

5. Niech będzie dany ciągły homomorfizm

$$\boldsymbol{R} \ni t \to T(t) \in \mathcal{B}(X), \qquad T(t+s) = T(t)T(s).$$

Wówczas $T(t) = e^{tA}$, gdzie $A \in \mathcal{B}(X)$ jest zdefiniowany jako

$$A = \lim_{t \to 0} t^{-1}\Big(T(t) - I\Big).$$

Co więcej, $T(t)$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t), \qquad X(0) = I.$$

Dowód jednoznaczności: Ustalmy $t \in \boldsymbol{R}$ i połóżmy $Z(s) = e^{(t-s)A} X(s)$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $Z'(s) = 0$ dla $s \in \boldsymbol{R}$, więc

$$Z(t) - Z(0) = \int_0^t Z'(s)\, ds = 0.$$

Zatem $X(t) = Z(t) = Z(0) = e^{tA}$. □

6. Jeśli $T(t) = e^{tA}$, to rezolwenta operatora A wyraża się dla $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$ wzorem

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} T(t)\, dt.$$

7. Półgrupa operatorów splotu z jądrem Gaussa rozważana na $L^p(\boldsymbol{R}^n)$, gdzie $1 < p < \infty$ ma postać

$$P_t f(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y) p_t(y)\, dy, \qquad p_t(x) = t^{-n/2} e^{-\pi t^{-1} |x|^2}.$$

Ta półgrupa operatorów nie jest ciągła w normie. Mamy bowiem

$$\|P_t p_t - p_t\| = \|pt \star p_t - p_t\|_p \geqslant t^{-n/2(1/p-1)} \|p_2 - p_1\|_p = \frac{\|p_2 - p_1\|_p}{\|p_1\|_p} \|p_t\|_p,$$

co oznacza, że $\|P_t - I\| \geqslant A$, gdzie $A = \frac{\|p_2 - p_1\|_p}{\|p_1\|_p} > 0$.