10. Od funkcjonału do półgrupy

1. Twierdzenie. Niech będzie dany uogólniony laplasjan P na $\boldsymbol{R}^d$. Istnieje wtedy dokładnie jedna półgrupa miar podprobabilistycznych μ_t, dla której P jest funkcjonałem generującym.

2. Zdefiniujmy operator

$$U : \mathcal{D} = C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d) \to X = C_0(\boldsymbol{R}^d)$$

wzorem

$$Uf(x) = P \star f(x) = \int f(x-y)P(y)\,dy =< P, \widetilde{f}_{-x} > .$$

Przestrzeń $C_0(\boldsymbol{R})$ rozpatrujemy nad $\boldsymbol{R}$.

3. Jeśli $f(x_0) = \sup f(x)$, to $Uf(x_0) \leqslant 0$.

4. U jest dysypatywny, czyli $\|f - Uf\| \geqslant \lambda\|f\|$ dla $f \in \mathcal{D}$ i $\lambda > 0$. Zastępując w razie potrzeby f przez cf, gdzie $|c| = 1$, możemy przyjąć, że $\|f\| = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in \boldsymbol{R}^d$. Wtedy

$$\lambda\|f\| = \lambda f(x_0) \leqslant \lambda f(x_0) - Uf(x_0) \leqslant |\lambda f(x_0) - Uf(x_0)| \leqslant \|\lambda f - Uf\|.$$

W szczególności $\lambda I - U$ jest mocno injektywny.

5. U jest domykalny. Jego domknięcie $\bar{U}$ ma w swojej dziedzinie podprzestrzeń

$$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d) = \{f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^d) : \forall\alpha\ D^\alpha f \in C_0(\boldsymbol{R}^d)\}.$$

U jest domykalny, bo jest dysypatywny. Można to też zobaczyć bezpośrednio. Rzeczywiście, przypuśćmy, że $f_n \to 0$ i $Uf_n \to g$, gdzie $f_n \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$, $g \in C_0(\boldsymbol{R}^d)$. Niech φ będzie dowolną funkcją w $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^d)$. Wtedy $Uf_n \star \varphi \to g \star \varphi$, więc dla każdego $x \in \boldsymbol{R}^d$

$$g \star \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{P} \star f_n) \star \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} < \widetilde{f_n}, \varphi_x \star P >= 0.$$

Tak więc $g \star \varphi = 0$, co wobec dowolności φ oznacza, że $g = 0$.

Drugiej części tezy dowodzimy przez łatwą aproksymację, wykorzystując domkniętość $\bar{U}$.

6. $I - \bar{U}$ ma gęsty obraz. Rzeczywiście, niech μ będzie miarą że $< \mu, f - \bar{U}f >= 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{D}$. Wtedy

$$f \star \widetilde{\mu}(x) = \bar{U}(f \star \widetilde{\mu})(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^d.$$

Zatem

$$| < f, \mu > | = |\widetilde{\mu} \star f(0)| \leqslant \|\widetilde{\mu} \star f\| \leqslant \|\widetilde{\mu} \star f - \bar{U}(\widetilde{\mu} \star f)\| = 0,$$

skąd $\mu = 0$.

7. Jeśli $(\lambda I - \bar{U})f \geqslant 0$, to $f \geqslant 0$. Jeśli f osiąga minimum w x_0, to dla każdego x

$$\lambda f(x) \geqslant \lambda f(x_0) \geqslant \lambda f(x_0) - Uf(x_0) \geqslant 0.$$

8. Z dotychczasowych rozważań wynika, że $\bar{U}$ spełnia założenia twierdzenia H-Y, a więc jest generatorem mocno ciągłej pólgrupy kontakcji $T_t f = \mu_t \star f$, gdzie $\mu_t \in M(\boldsymbol{R}^d)$. Co więcej, poprzedni punkt pokazuje, że

$$f \geqslant 0 \implies (\lambda I - U)^{-1} f \geqslant 0,$$

skąd łatwo wynika, że $\mu_t \geqslant 0$. Jedyność półgrupy wynika z twierdzenia H-Y.

9. Zauważmy jeszcze, że dziedzina generatora U zawiera popdprzestrzeń

$$\mathcal{C}_0^2 = \{f \in C_0(\boldsymbol{R}^d) : \forall|\alpha| \leqslant 2\ D^\alpha f \in C_0(\boldsymbol{R}^d)\}.$$

10. Miary μ_t są probabilistyczne, wtedy i tylko wtedy gdy $< P, 1 >= 0$. W tym celu wystarczy rozważyć półgrupę kontrakcji $T_t f = \mu_t \star f$ na jednowymiarowj podprzestrzeni niezmienniczej $C_0 \oplus \boldsymbol{R}$ złożonej z funkcji stałych i zauważyć, że półgrupa jest trywialna, wtedy i tylko wtedy gdy jej generator jest zerowy.

11. Przykład. Rozważmy półgrupę Cauchy'ego

$$\mu_t(dx) = \frac{c_n t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Mamy

$$\widehat{\mu_t}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$$

oraz

$$< P, f >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\Big(f(x) - f(0)\Big)\, dx}{|x|^{n+1}}.$$